Chapitre 1 : Notion d’ensemble et opérations sur les ensembles

I) Notion d’ensemble

Ensemble, groupement, collection représente la même notion appelée en mathématique : Ensemble

Définition : Un ensemble E est bien définie lorsque l’on possède un critère permettant d’affirmer, pour tout objet A, s’il appartient ou non à l’ensemble E.

Terminologi : On dit d’un ensemble A qu’il appartient à E ⇔ E contient

$A \in E$

- Un objet ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble. (On ne peut pas dire que $A \in A$)
- On ne parlera pas d’ensemble de tous les ensembles mais de la collection de tous les ensembles.

- On dira que deux ensembles sont égaux lorsque tous éléments de l’un est élément de l’autre.

Exemple : { a, b} = {b, a} = {b, a, b, b, a, a} : Un SEUL ensemble

Notation : Pour décrire un ensemble on utilise les accolades

E = { Eléments de E }

Exemple d’ensemble :

$\mathbb{N}$: {0, 1, 2, …, n , …}
$\mathbb{Z}$: {…, -n,…,-2,-1,0, 1, 2, …, n , …}
$\mathbb{Q}$: {Q / P avec P entier relatif et Q entier re atif $\neq 0$ }
$\mathbb{R}$: Nombres réels
$\mathbb{C}$: Nombres complexes

II) Opérations de base : Inclusions, réunion, intersection

Définition : On dira qu’un ensemble F est inclut dans l’ensemble E lorsque tout élément de F est élément de E.

On note $F \subset E$

Terminologi :
« F est inclus dans E »
« F est un sous-ensemble de E »
« F est une partie de E »

- Un élément A appartient à un ensemble E, on ne peut pas dire A est inclus dans E.

$A \in E \Leftrightarrow \{A\} \subset E$
Mais $A \not\subset E$

- $F \subset E$ est une inclusion au sens large ($F = E$ est autorisé)
- $F \subsetneq E$ (Inclusion stricte $\Leftrightarrow F \subset E$ et $F \neq E$)

<u>Reformulation mathématiques :</u>

$F \subset E \Leftrightarrow$ pour tous x
Si $x \in F$ alors $x \in E$

Sous-ensemble particulier :
0 : ensemble vide (ensemble constitué d'aucun élément)
$X \in 0 \leftarrow$ Proposition toujours fausse
$0 \subset E \leftarrow$ Proposition toujours vrai quel que soit l'ensemble E

E est un sous-ensemble de lui-même
$\wp$(E) est l'ensemble de toutes les parties de E

Exemple :
E = {a, b} les parties de E sont 0, {a,b}, {a}, {b}

Singletons

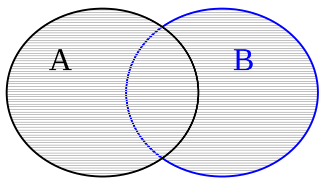
$\wp$(E) = {0, {a,b}, {a}, {b

a. Réunion de deux ensembles

<u>Définition :</u>

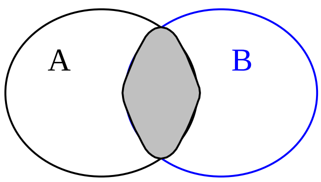
La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A OU à B.

$X \in A \cup B \Leftrightarrow X \in A$ OU $X \in B$



b. Intersection de deux ensembles

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B.

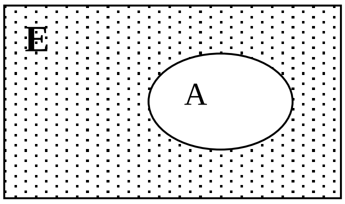


Réunion et intersection sont :
- commutatives $A \cup B = B \cup A$
- associatives
- distributives : $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

c. Complémentations

Soit E un ensemble et $A \subset E$

<u>Définition :</u> On appelle complémentaire de **par rapport** à E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



<u>Notation :</u>

$[_E\, A$, $E \setminus A$, $E - A$

Si E est évident dans le contexte, on notera [A , ^{c}

<u>Quelques propriétés :</u>

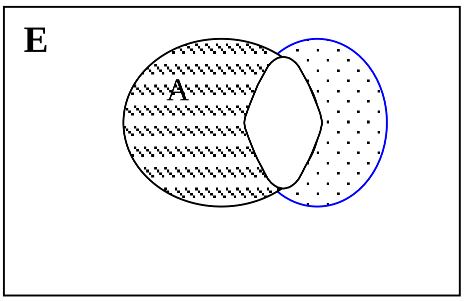
- $(A^c)^c = A$
- Si $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$
- Lois de DeMorgan

$(A \cup B)^c = \; ^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = \; ^c \cup B^c$

Différence de deux ensembles

A,B deux parties d'un ensemble E
$A - B = \{ x \in | \quad \in A \text{ et } x \in B \} = A \cap B^c$



$A - B \neq B - A$

Différence symétrique de deux ensembles : A, B deux parties de E.

$$\begin{aligned} A \,\Delta\, B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

III) **Recouvrement et partition :**

Soit E un ensemble, soit $\mathscr{F}$ une famille de parties de E ($\mathscr{F} \subset \wp$(E))

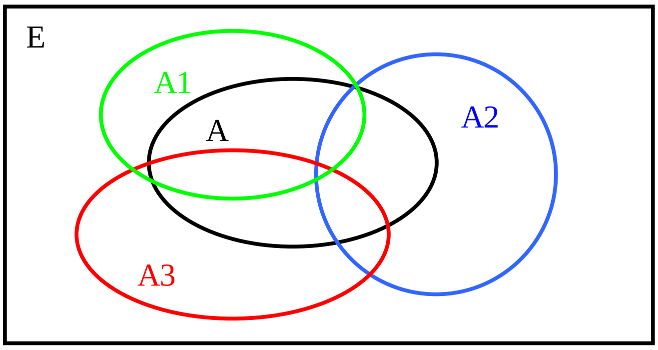
- Intersection de la famille $\mathscr{F}$

$$\bigcap_{F \subset \mathscr{F}} F = \{x \in E \mid x \in F \text{ pour tout } F \text{ de } \mathscr{F}\}$$

$$\bigcup_{F \subset \mathscr{F}} F = \{x \in E \mid \text{il existe } F \text{ de } \mathscr{F} \text{ tel que } x \in F\}$$

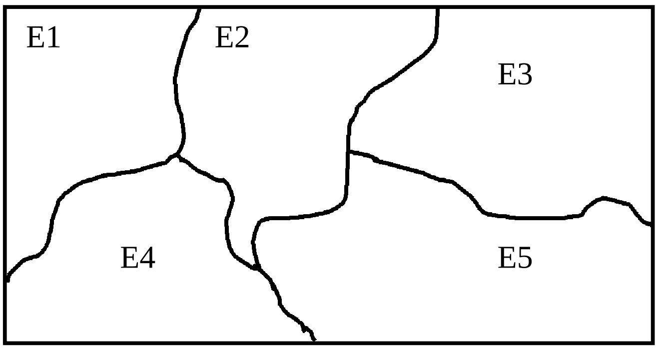
Définition : Soit A une partie de E. Un recouvrement R de A est une famille de parties de E dont la réunion contient A

{ A1, A2, A3} est un recouvrement de A.



Définition :
Une partition P d'un ensemble E est un recouvrement de E dont les éléments sont :
- non vides
- Deux à deux disjoints

E

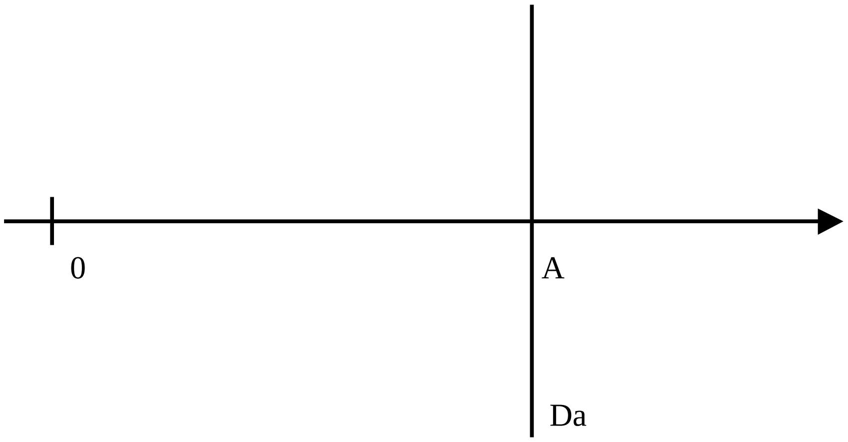


{E1, E2, E3, E4, E5} est une partie de l'ensemble E

Exemple de partition :

$E = \mathbb{R}^2$

SI $A \in \mathbb{R}$, Da : Droite d'équation $x = A$



$\{Da, A \in \mathbb{R}\}$ est une partie du plan

$\cup$ Da = $\mathbb{R}^2$

$a \in \mathbb{R}$

Da $\neq 0$ pour tout $A \in \mathbb{R}$

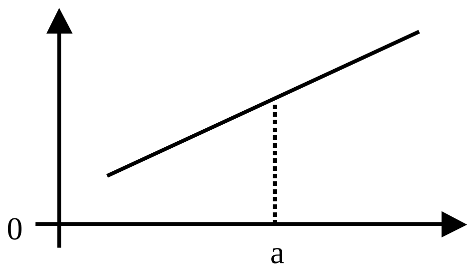
Si $A1 \neq A2$ $Da1 \cap Da2 = 0$

Application et relation :

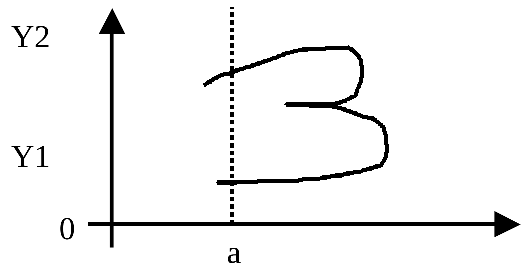
I) Notion d'application

Définition : Etant donné deux ensembles A et B, f est une application de A dans B si pour tous $x \in A$ f → (fait correspondre) un unique élément.

$Y \in B$



Graphe d'une application sur [0 ,a]



Ce n'est pas le graphe d'une application

Notation :

F : A → B
X → Y =f (x)

Terminologi :

« Application » ⟺ Fonction »
A : Ensemble de départ (domaine de définition de f
B : Ensemble d'arrivé

Y : L'image de x par f
X : un antécédent de y par

Exemple : f [-1 ; 1] → $\mathbb{R}$

$x \to \sqrt{1-x^2}$

f2 : $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$
$\mathbb{Z} \to |\mathbb{Z}|$

Application identité E → E noté I_E
Injection canonique $E \subset F$

E → F
X → X

F (x) = g (x)

II) Surjectivité – Injectivité – Bijectivité

F : A → B

→ Image de x par f

$f(x) = \{ y \in B \mid \text{il existe } x \in X \text{ tel que } y = f(x) \}$
$= \{ f(x) \text{ avec } x \in X \} \subset B$

→ Image réciproque de y par

$F^{-1}(y) = \{X \in A \text{ et tel que } f(x) \in Y \}$

→ Exemple :

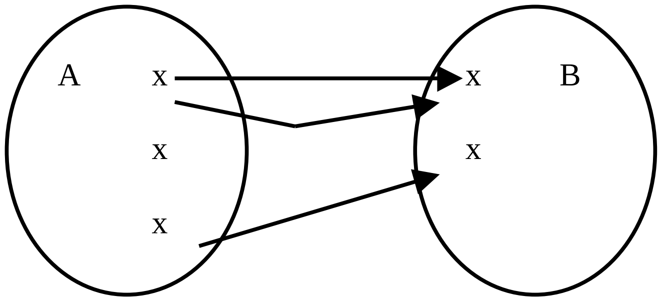
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \sin x$
$f(\mathbb{R}) = [-1 ; 1]$
$f([0 ; \Pi / 2]) = [0 ; 1]$

$F^{-1}(\{2\}) = \{ X \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sin x = 2 \} \neq 0$

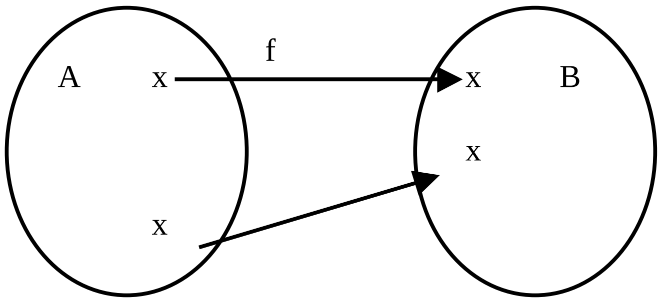
$F^{-1}(\{1/2\}) = \{ X \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sin x = 1/2 \}$
$= \{ \Pi / 6 + 2k\Pi , k \in \mathbb{Z} \}$
$\cup \{ 5\Pi/6 + 2k\Pi , k' \in x \}$

<u>Définition :</u>

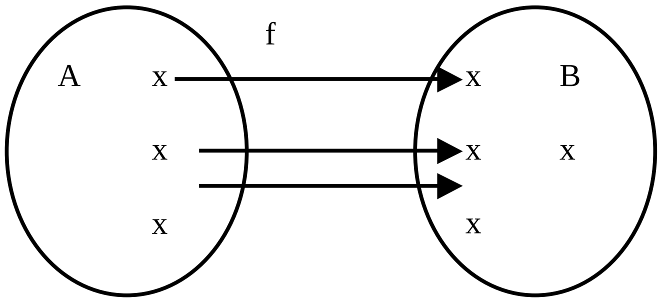
F : A → B
L'application est dite surjective ssi F(A) = B
L'application est dite injective s $\forall x, x' \in A$
$F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$
Si $x \neq x' \Rightarrow F(x) \neq F(x')$
: L'application est dite bijective quand elle est à la fois surjective et injective.



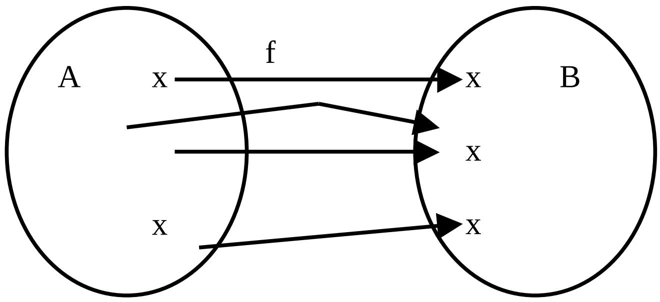
f n’est pas une application



F est seulement une application



F est une application injective



F est surjective mais pas injective

→ Injective : tout élément de B a au plus un antécédent.
→ f est surjective : tout élément de B a au moins un antécédent.
→ f est bijective : tout élément de B à un antécédent.

→ Conséquence : Soit f :A → B

On suppose que A et B sont fini
F injective $\Rightarrow$ Card B $\geq$ Card A
F surjective $\Rightarrow$ Card b $\leq$ Card A
F bijective $\Rightarrow$ Card B = Card A

$F : A \rightarrow B$ Bijective $\Leftarrow \Rightarrow$ tout élément $y \in B$ admet un unique antécéden
$\Leftarrow \Rightarrow$ Pour tout $y \in B$, il existe un unique $X \in A$ tel que $y = f(x)$

Donc on peut définir l'application de B dans A vérifiant : $Y = f(x)$

F^{-1} : $B \rightarrow A$
: $y \rightarrow x$ l'unique solution de $y = f(x)$

f^{-1} est l'application réciproque (Ou inverse de f)

Remarque : Par définition de $^{-1}$, on a l'équivalence $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$ (Utile dans la pratique pour exploiter f^{-1}.

Propriétés :

Exercice :
Si f est bijective alors :
- f^{-1} est bijective
- pour tout $y \in b$, $f(f^{-1}(Y)) = Y$
$\Leftrightarrow f \circ f^{-1} = I_B$
- $\forall X \in A$, $f^{-1}(f(x)) \Leftrightarrow f^{-1} of = I_A$

Propriétés :

$F : E \rightarrow F$, $A,B \subset E$

a. Si $A \subset B$ alors $F(a) \subset F(b)$
b. $F(A \cap B) = F(A) \cup F(B)$
c. $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$, si f est injective $\subset$" $\Rightarrow$ "="

Démonstrati :

$F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$
Soit $y \in F(A \cap B) \Leftrightarrow$ il existe

$$\begin{cases} X \in A \text{ et } Y = F(X) \\ \Rightarrow Y \in F(A) \\ \text{et} \\ X \in B \text{ et } Y = F(X) \\ Y \in F(B) \end{cases}$$

$\Rightarrow Y \in F(A) \cap F(B)$

Supposons que f est injective : montrer que $f(A \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
Soit $Y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow Y \in f(A) \Rightarrow$ Il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et $y \in f(b) \Rightarrow$ il existe $x' \in B$ tel que $Y = f(X')$
$\Rightarrow Y = f(x) = f(x')$, comme f est injective $\Rightarrow x = x'$
$\Rightarrow \exists\, x = x' \in A \cap B$ et $Y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \cap B)$

III) **Relations** Relation d'équivalence – Relation d'ordre

1) Produit cartésien de deux ensembles

Soit A et B deux ensembles, soit $x \in A$ e $y \in B$
(x , y) est défini comme suit
$(x , y) = (x' , y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

Remarque : $(x , y) \neq (y , x)$
$A \times B = \{ (x , y) , x \in A, y \in B \}$: Produit cartésien

Définition : On appelle relation $\Re$ entre deux variables, respectivement à deux ensembles E et F toute propriété définie sur le produit $E \times F$

Si $(x , y) \in E \times F$ vérifie la propriété, on dira que x est en relation avec y

On notera $x \Re y$

Lorsque les ensembles E = F, $\Re$ est appelée relation binaire.

Exemple :
1) $E = F = \mathbb{N}^*$, *« x divise y »* $(x , y \in \mathbb{N}^*)$ *définit une relation binaire sur* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
2) *E = F = Groupe d'individu, « x est ami avec y » définit une relation binaire sur* $E \times F$
3) $E = F = \wp(x)$ *(Ensemble des parties de l'ensemble x)*

« A est inclus dans B » définit une relation entre A et B sur $\wp(x) \times \wp(x)$

2) Propriétés sur les relations

Soit un ensemble E, soit $x, y, z \in E$ et $\Re$ relation binaire sur E.

- $\Re$ est réflexive ssi $x \Re x$
- $\Re$ est symétrique ssi $(x \Re y \Rightarrow y \Re x)$
- $\Re$ est anti-symétrique ssi $(x \Re y$ et $y \Re x \Rightarrow x = y \}$
- $\Re$ est transitive ssi ($x \Re y$ et $y \Re z$ alors $x \Re z$)

Exemple :
1)
$E = \mathbb{N}^*$ *, « x divise y »*
Relation réflexive, non symétrique, antisymétrique, transitive (Si x divise y et y divise z alors x divise z)

2) $E = \wp (x)$*, «* $A \subset B$ *»*
Relation réflexive, non symétrique, antisymétrique, transitive.

3) Relation d'équivalence

Définition : Une relation binaire définit sur un ensemble E, est une relation d'équivalence si elle est :

- Réflexive
- Symétrique
- Transitive

Notation : $x \Re y$ sera noté $x \equiv y$ (mod $\Re$)
(Se lit x est congrus à y modulo $\Re$)

Exemple : E = { Droites de $\mathbb{R}^3$ }
« D_1 est parallèle à D_2 »
(La seule relation qui vérifie les quatre critères est l'égalité)
Soit $x \in E$, $c(x) = \{ y \in E \mid y \equiv x \pmod{\Re} \} \subset E$
C (x) est la classe d'équivalence de x relativement à $\Re$

Notation : $c(x)$, $\bar{x}$, $\dot{x}$: Classe de x

C (x) peut elle être vide ? Non $x \in c(x)$ car $x \equiv x \pmod{\Re}$ d'après la réflexivité de $\Re$.

Théorème : Soit $\Re$ relation d'équivalence sur E, $C(x) = C(y)$ ssi $x \Re y$ ($x \equiv y \bmod \Re$)

Preuve :
- On suppose que $c(x) = c(y)$
  $x \in c(x) = c(y) \Rightarrow x \in c(y)$
  ce qui équivaut à $x \equiv y \pmod{\Re}$
- On suppose que $x \equiv y \pmod{\Re}$
Montrons que $C(x) \subset C(y)$
Soit $Z \in C(x) \Rightarrow Z \equiv x \pmod{\Re}$ or on a ($x \equiv y \pmod{\Re}$)
Donc $Z \equiv y \pmod{\Re}$ d'après la transitivité
$Z \in C(y)$ de $C(x) \subset C(y)$
Par symétrie on a $C(y) \subset C(x)$
Donc C (x) = C (y

Corollaire : Deux classes d'équivalences sont soit égales soit disjointes.

Preuve : Soit deux classes d'équivalences, $C(X) \cap C(Y) \neq 0$
Montrons que $C(x) = C(y)$

$C(X) \cap C(Y) \neq 0 \Rightarrow \exists Z$ tel que $Z \in C(X)$ et $Z \in C(Y)$
$Z \in C(X) \Rightarrow Z \equiv X \pmod{\Re} \Longleftrightarrow X \equiv Z \pmod{\Re}$
$Z \in C(Y) \Rightarrow Z \equiv Y \pmod{\Re}$
$\Rightarrow X \equiv Y \pmod{\Re}$
Transitivité
$\Longleftrightarrow C(X) = C(Y)$

Théorème : Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E alors l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

$\{ C(X), X \in E \}$ Partition de E.

Preuve :

- Trois conditions à vérifient :
  - $\forall x \in E, C(X) \neq 0$ (Car $x \in C(X)$)
  - Les classes d'équivalence sont deux à deux disjointes
  - Il reste à vérifier que $E = \bigcup_{X \in E} C(X)$

$$- \bigcup_{X \in E} C(X) \subset E \text{ car } C(X) \subset E \ \forall X \in E$$

$$- E \subset \bigcup_{X \in E} C(X) \quad \text{Soit } y \in E \text{ alors } y \in C(X)$$

$$\Rightarrow y \in \bigcup_{x \in E} C(X)$$

Définition : L'ensemble des classes d'équivalence de E relativement à $\Re$ est appelé **ensemble quotient de E par rapport à $\Re$** et est noté $E_{/\Re}$.

Remarque : $E_{/\Re} \subset \wp(E)$
Si $x \in E, C(X) \in \wp(E) \Rightarrow E_{/\Re} = \{ C(x), x \in E \} \subset \wp(E)$

4) Relation d'ordre

Définition : Une relation binaire $\Re$ sur E est une relation d'ordre si elle possède les propriétés suivantes :

- Réflexivité
- Antisymétrique
- Transitivité

On dira alors que le couple (E, $\Re$) est un ensemble ordonné.

Notation : Si $\Re$ est une relation d'ordre $x \Re y$ sera noté $x \prec y$
Se li :

x est inférieur à y
x est antérieur à y
y est supérieur à x
y est postérieur à x

$Y \prec X$ Ne pas écrire $\succ Y$

<u>*Exemple :*</u> $E = \mathbb{R}$, « $x \,\Re\, y$ « $\Leftrightarrow$ « $x \leq y$ »

« $X < Y$ » ne définit pas une relation d'ordre (Pas réflexive)

$E = \wp(x)$ « $A \,\Re\, B$ » $\Leftrightarrow$ « $A \subset B$ »

<u>Définition :</u> Une relation d'ordre sur $\wp(x)$

- $\left.\begin{array}{l}\text{Si } x,y \in \mathbb{R} \\ x \leq y \text{ ou } y \leq x\end{array}\right\}$ Totale

- $\left.\begin{array}{l}\text{Si } A,B \in \wp(x) \\ \text{On n'a pas nécessairement } A \subset B \text{ ou } B \subset A\end{array}\right\}$ Partiell

Une relation d'ordre sur E est dite totale si pour tous $x, y \in E$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$
On dit que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Une relation d'ordre qui n'est pas totale est dite partielle.

<u>Définition :</u> Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonnée et X une partie de E.
Un élément a de E est un majorant de X si pour tout $x \in X$, $x \preccurlyeq a$
Un élément a de E est un minorant de X si pour tout $\in X$, $a \preccurlyeq x$

<u>Borne supérieur et inférieure</u>

Soit X une partie de E majorée et minorée (Bornée).
On appelle borne supérieure de X dans E, le plus petit des majorants de X (S'il existe)
On appelle borne inférieure de X dans E, le plus grand des minorants de X (S'il existe)

<u>Notation :</u>

$a = \inf_{E} X$ $\qquad$ $b = \sup_{E} X$

Ensemble de recherche

<u>Propriétés :</u>

Si $X \subset Y \subset E$

$\inf_{E} Y \preccurlyeq \inf_{E} X$

$\sup_{E} X \preccurlyeq \sup_{E} Y$

Structure Algébriques

Définition : On appelle loi de composition interne sur E toute application de $E \times E$ dans E. A tout couple $(x, y) \in E \times E$, la loi de composition interne associé un unique élément Z (Résultat de l'opération) de E

Notation :

L 'élément Z :
- Résultat de la composition de x et y
- Composé de x et y

Exemple : E $\in \mathbb{N}$.

L'addition sur $\mathbb{N}$ définit une LCI
La multiplication sur $\mathbb{N}$ définit une LCI
La soustraction ne définit pas une LCI sur $\mathbb{N}$ mais une LCI sur $\mathbb{Z}$

1. Propriétés d'une *LCI* (Règles de calculs)

   E muni d'une *LCI* appelée *

   a. Associativité : * est associative si (x*y) * z = x * (y * z)
   b. Commutativité : * est commutative si x * y = y * x $\quad \forall x, y \in E$
   c. Elément neutre : e est un élément neutre pour * si e * x = x * e = x $\quad \forall x \in E$
   d. Symétrie : On dira que x est symétrisable par * ssi il existe un $\in E$ tel que
      x * y = y * x = e
      y est appelé symétrique de x noté x^{-1}

Addition su $\mathbb{N}$

- Associativité
- Commutative
- Elément neutre 0 pour l'addition
- Si $a \neq 0$, a n'est pas symétrisable

  Sur $\mathbb{Z}$
  - Associativité
  - Commutativité
  - Elément neutre 0 pour l'addition

  $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a^{-1} = -a$

Multiplication sur $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$, x)

- Associativité
- Commutativités
- Elément neutre 1
- Si $a \neq 1$,a n'est pas symétrisable

Proposition :

On considère un ensemble E muni d'une LCI
i) L'élément neutre, s'il existe, est unique. Si on suppose, de plus, que * est associative
ii) Le symétrique de x, s'il existe, est unique
iii) Si x et y sont symétrisable alors la composée de x et y l'est auss

$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Preuve :

i) Supposons qu'il existe deux éléments neutres e et e'

→ e élément neutre : $x * e = e * x = x \quad \forall x \in E$

pour $x = e'$

$e' * e = e * e' = e' \quad (1)$

→ e' élément neutre : $x * e' = e' * x = x \quad \forall x \in E$

pour $x = e$

$e * e' = e' * e = e \quad (2)$

(1) et (2) $e = e'$

ii) Soit $x \in E$ symétrisable. Supposons qu'il existe deux éléments symétriques y et y' de x :

y est élément symétrique de x :

$y * x = x * y = e \quad (1)$

y' est élément symétrique de x :

$y' * x = x * y' = e \quad (2)$

$$\begin{cases} y' * (x * y) = y' * e = y' \\ \qquad\qquad (1) \\ (y' * x) * y = e * y = \\ \qquad\qquad (2) \end{cases}$$

Comme * est associative on a alors y = y'

II) Groupes et sous-groupes :

Définition d'un groupe : On considère un ensemble G muni d'une LCI *, alors on dira que G muni de * (G, *) est un groupe
- Si LCI est associative
- Si G admet un élément
- Tout élément de G est symétrique

Si de plus, * est commutative (G,*) est un groupe commutatif ou groupe abélien.

Remarque :

- Ne pas oublier de vérifier que * définit bien une LCI
Si on prend deux éléments quelconque de G alors le résultat $\in$ à G. x , y $\in$ G alors x * y $\in$ G
- Si G est finit (Card G = n) G est appelé groupe fini d'ordre n (G, *) définit un groupe.

Définition d'un sous-groupe :

(G , *) définit un groupe
Soit une partie H non vide de G
H est un sous-groupe de (G, *) si (H , *) définit un groupe (CF les 4 critères)

Remarque :
- Si (G, *) est un groupe alors (G , *) est un sous-groupe de lui-même.
- ({ e }, *) élément neutre muni de la loi * est un sous-groupe de (G , *)

Exemple : ($\mathbb{Z}$, +) est un groupe commutatif n$\mathbb{Z}$ (Multiple de n) (n $\in$ $\mathbb{Z}$ fixé)
(n$\mathbb{Z}$, +) est un sous-groupe de ($\mathbb{Z}$, *)

Théorème :
Soit H une partie non vide de G (On suppose que G est un groupe) (H , *) est un sous -groupe de (G, *) si x $\in$ H et y $\in$ H $\Rightarrow$ (x * y^{-1} $\in$ H)

Preuve : On suppose que (H, *) est un sous-groupe de (G , *) On prend x, y $\in$ H
Montrons que x * y^{-1} $\in$ H.
Y $\in$ H (H est un groupe donc g^{-1} $\in$ H)
On a aussi x $\in$ H alors x * y^{-1} $\in$ H
Supposons que x $\in$ H et y $\in$ H $\Rightarrow$ x * y^{-1} $\in$ H
Vérifions que (H, *) est un groupe
- * associative : découle de l'associativité sur G
- Elément neutre : $\in$ H
  Donc x * x^{-1} $\in$ H (On prend la propriété et on prend y = x)
  Donc élément neutre est dans H car x * x^{-1} = e

- Elément symétrique
  Soit y $\in$ H alors e * y^{-1} = y^{-1} $\in$ H en prenant x = e

- Vérifions que *définit un LCI sur H
  x, y, z $\in$ H
  Si z $\in$ H $\Rightarrow$ z^{-1} $\in$ H donc x * $(z^{-1})^{-1}$ $\in$ H
  Y = z^{-1} Or $(z^{-1})^{-1}$ = z d'où x * z $\in$ H

Corollaires :

i) Tout sous-groupe de (G, *) contient l'élément neutre e
ii) Toute intersection de sous-groupe de (g, *) est un sous-groupe de (G, *)

En général la réunion de sous-groupe <u>n'est pas</u> un sous-groupe

Preuve :

ii) Soit $(Hi)_{i \in I}$ une famille de sous-groupe de (G, *) Soit $H = \bigcap_{\in I} H$

Montrons que (H, *) est un sous-groupe de (G , *)
$e \in Hi, \forall i \in I$ car Hi est un sous-groupe par hypothèse donc il appartient à l'intersection des Hi
D'où $H \neq 0$

Soit $x, y \in H$ Montrons que $x * y^{-1} \in H$
$x, y \in Hi \quad \forall i \in I$
Or Hi est un groupe de (G, *)
Donc $x * \;^{-1} \in Hi \quad \forall i \in I$
D'où $x * y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} Hi = H$

D'où H est un sous-groupe de (G, *)

Théorème de Lagrange

Soit (G, *) un groupe fini et H un sous-groupe de (G, *) alors Card H divise le Card de G .

Preuve : Admis

Partie II Algèbre linéaire :

Chapitre IV Espaces vectoriels

Par la suite K $\mathbb{R}$ Ou $\mathbb{C}$

Définition : Soit un ensemble E, on dira que la LCI . est une LC Externe (LCE) entre E et K ss $\forall x \in E, \forall \lambda \in K$

$\lambda . x \in E$

(LCE application de $K \times E$ dans E)

Définition : Espace vectorie

Soit E un ensemble muni d'une LCI + et d'une LCE .
On dira que E est un K-Espace vectoriel s :

- E muni de LCI + soit un groupe commutatif
- $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K$ on est $\lambda . (\mu . x) = (\lambda . \mu) . x$
- $\forall x \in E$ $1 . x = x$
- $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K$ $(\lambda + \mu) . x = (\lambda . x) + (\mu . x)$
- $\forall x, y \in E, \lambda \in K$ $\lambda . (x + y) = \lambda . x + \lambda . y$

Terminologi :

- Toujours parlé de K – espace vectorie
- Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés « vecteurs » x, y
- Les éléments de K sont appelés des « scalaires » λ , μ

Exemple :

R^3 est l'ensemble des vecteurs de l'espace = { (x1,x2,x3) , x1, x2, x3 $\in \mathbb{R}$ }

La LCI $\vec{x} + \vec{y}$

La LCE $\lambda . \vec{x}$

R^3 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais ce n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectorie

Exemple :

E = F(R) = {Fonctions de R dans R }
LCI : f + g
LCE : $\lambda . F$

E est un R – espace vectoriel mais pas un C – espace vectorie

Un vecteur peut être un vecteur au sens propre, ma s aussi une fonction, un polynôme, etc.

Définition : (Sous-espace vectoriel)

Soit E un K – espace vectoriel et F une partie non vide de E. On dira que F est un sous-espace vectoriel de E s

$\forall$ x, y $\in$ F, x + y $\in$ F (Stabilité par addition)

$\forall$ $\lambda \in$ K et X $\in$ F , λ . x $\in$ F (Stabilité par multiplication d'un scalaire)

F est alors un K – espace vectorie

Remarque :

Un sous-espace vectoriel contient toujours un élémen : 0

$\lambda = 0$, $x \in F \Rightarrow \underbrace{\lambda\ .}_{0}\ x \in F$

La question de vacuité de F revient à vérifier si 0 $\in$ ou pas à F.

Si E est un K – Espace vectoriel alors

- E est un SEV de E
- Le singleton { 0 } est un SEV de E

Exemple :

R^3 sous-espace vectoriel de R^3

- R^3
- { (0, 0, 0) }
- Les droites vectorielles de R^3

  droites qui passent par zér

- Plans vectoriels de R^3 (Plans qui passent par zéro)
- Si (G , +) est un groupe

  x1,…xp $\in$ G

  alors x1+x2+…+xp $\in$ G

- Si E est un K – espace vectorie

  x1, x2, …xp $\in$ E

  Si $\underbrace{\lambda 1x1 + \_\_\_ + \lambda pxp}$ $\in$ E

Combinaison linéaire de x1,___,xp

Toute combinaison linéaire d'élément de E définit un élément de E.

II Intersection de SEV et SEV engendré par une partie

Soit E un K – EV

Proposition :

Une intersection quelconque de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve : Soit $(Ei)_{i \in E}$ une famille de SEV de E

$F = \bigcap_{\in I} E$ on va montrer que F est un SEV de E

F est non vide car $0 \in Ei$ $\forall$ i donc $0 \in \bigcap_{\in I} Ei = F$

- Stabilité par addition
  $x, y \in F$. Montrons que $x + y \in F$
  $x, y \in F \Rightarrow x, y \in Ei\ \forall\ i \in I$
  or Ei est un sous-espace vectorie
  donc $x + y \in Ei\ \forall\ i \in I$
  $x + y \in \bigcap_{i \in I} Ei = F$

- Stabilité par multiplication
  $\lambda \in K$, $x \in E$. Montrons que $\lambda\, x \in F$
  $x \in Ei\ \forall\ i \in E$

  Or Ei SEV de E si $x \in Ei$ alors $\lambda\, x \in Ei$
  $\forall\ i \in I$ donc $\lambda\, .\, x \in E \bigcap_{i \in I} Ei = F$

  donc F est bien SEV de E

  Question :

  Soit x1,___,xp $\in$ E (E est un K-EV)
  Quel est le plus petit SEV contenant x1,___,xp ?

  Appelons F ce SEV

  On a x1, x2, __ ,xp $\in$ F

  On a H = { λ1x1, λ2x2, ___, λpxp } $\subset$ F

  H est un SEV de E qui contient tous les xi

  donc $F \subset H \Rightarrow F = H$

  Remarque : C’est l’ensemble de toutes les combinaisons linéaire de x1, __, xp.

Conclusi :

Le plus petit sous EV de E contenant {x1, x2,__,xp} est appelé SEV engendré par { x1,…,xp} et il est noté vect {x1,…,xp}
On a Vect{ x1,…,xp} est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de x1, …,xp
De manière plus générale, si A est une partie de E. On notera Vect (A) le plus petit SEV de E contenant A
Vect (A) est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'élé ents de A

Définition :

Soit E un K – EV, on dira de E qu'il est de dimension fini s'il existe un nombre fini de vecteur de E tel que E = Vect { x1,…xp}

(Cela signifie que tout élément de E s'exprime comme combinaison de x1,…,xp)

Dans ce cas {x1,…,xp } est appelé partie génératrice de E

Exemple :

R^3
Soit trois vecteurs :
i = (1,0,0)
j = (0,1,0)
k= (0,0,1)

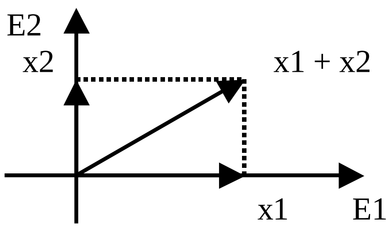
Soit x = (x1,x2,x3)
= x1i + x2j + x3 k

$\Rightarrow$ R^3 est de dimension fini

III Somme de deux Sous espaces vectoriels

En général E1 $\cup$ E2 n'est pas un SEV de E (Si E1, E2 sont deux SEV de E)

car



Définition :

Soit E un K-ev. Soit E1, E2 deux SEV de E
On définit :

E1 + E2 = Vect(E1$\cup$E2)

appelé somme de E1 et E2

Remarque : E1 + E2 est un SEV de E

Proposition :

$E1 + E2 = \{ x1 + x2 , x1 \in E1 , x2 \in E2 \}$

Ensemble des éléments qui s'écrivent x1 + x2

Notion de supplémentaire

Définition :

Soit E un K-ev et E1, E2 deux sev de E, On dira que E1 et E2 sont deux supplémentaires dans E Si :

- $E = E1 + E2$ // La somme des SEV permet de récupérer la globalité de E
- $E1 \cap E2 = \{ 0 \}$

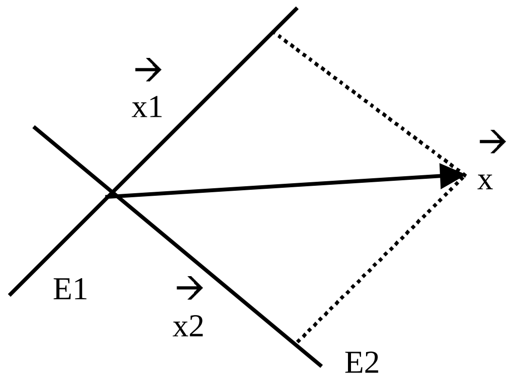
On dit que E1 et E2 sont en somme direct. On note $E = E1 \oplus E2$

Remarque :

Supplémentaire différent de complémentaire. Le complémentaire d'un SEV ne peut pas être un SEV car il ne contient pas 0.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, E1 et E2 deux droites vectorielles non confondues



Remarque :

$E = E1 + E2$ ($E1 + E2 \subset E$ est toujours vérifié)

$E \subset (E1 + E2) \Longleftrightarrow$ Tout $x \in E$, on peut trouver $\exists$ $x1 \in E1$, $\exists$ $x2 \in E2$ Tel que $x = x1 + x2$

Quelque soit $x \in E$ $\exists$ $x1 \in E1$ et $x2 \in E2$ tel que $x = x1 + x2$
Donc E1 et E2 sont des supplémentaires de E

Remarque :

Si F est un SEV de E alors F admet en général plusieurs supplémentaires

Théorèmes :

On a l'équivalence entre :

i) E1 et E2 sont des supplémentaires dans E

ii) La décomposition de tout élément $x \in E$ sous la forme $x1 + x2$ avec $x1 \in E1$ et $x2 \in E2$ est unique (cad si $x = x1 + x2 = x'1 + x'2$ $\quad x1, x'1 \in E1 \quad x2, x'2 \in E2$ alors $x1 = x'1$ et $x2 = x'2$)

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii)

E1 et E2 sont supplémentaires $\Rightarrow E = E1 + E2$
$\Rightarrow$ Tout élément de E se déco pose sous la forme $x1 + x2$ avec $x1 \in E1$ et $x2 \in E2$

Montrons l'unicité de la décompositi :

Supposons que x se décompose de deux manières

$x = x1 + x2 = x'1 + x'2$
$x1, x'1 \in E1$ et $x2, x'2 \in E2$
Montrons que $x1 = x'1$ et $x2 = x'2$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{x1 - x'1}_{\substack{\in E1 \\ \text{car } x1,\, x'1 \in E1}} = \underbrace{x2 - x'2}_{\substack{\in E2 \\ \text{car } x2,\, x'2 \in E2}}$$

$\Rightarrow x1 - x'1 \in E1 \cap E2$
$x2 - x'2 \in E1 \cap E2$
Or $E1 \cap E2 = \{ 0 \}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x1 - x'1 = 0 \\ x2 - x'2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x1 = x'1 \\ x2 = x'2 \end{cases}$$

ii) $\Rightarrow$ i)

$E = E1 + E2$ est unique
Montrons que $E1 \cap E2 = \{ 0 \}$

Soit $x \in E1 \cap E2$ Montrons que $x = 0$

Ecrivons

$$\begin{cases} 0 = \underset{\in E1}{0} + \underset{\in E2}{0} \\[2ex] 0 = \underset{\in E1 \cap E2 \subset E1}{x} + \underset{\in E1 \cap E2 \subset E2}{(-x)} \end{cases}$$

Par unicité de la décomposition suivant E1 + E2 on a x = 0 e – x = 0 $\Rightarrow$ x = 0

Donc E1 et E2 sont bien des supplémentaires

$A \subset E$, A est une partie génératrice de E si Vect(A) = E (On a toujours Vect(A) $\subset$ E)
$\Longleftrightarrow$ Pour tout $x \in E$, $\exists\ \lambda 1,\dots,\lambda p \in K$ et $x1,\dots,xp \in E$
Tel que $x = \lambda 1x1 + \dots + \lambda pxp$

Si A = {x1, …,xp}

A est une partie génératrice de E si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de x1,…,xp.

Question :

Etant donnée { x1, …,xp } une famille génératrice de E. Comment extraire de { x1,…,xp} une famille génératrice minimale ?

Si $xp = \alpha 1x1 + \alpha 2x2 + \dots + \alpha_{p-1}x_{p-1}$ alors Vect($x1,\dots,x_{p-1}$) = Vect(x1,…,xp) = E

Recherches des vecteurs superflus

Vecteur superflu : Vecteurs de { x1,…,xp } qui peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

{ x1,…,xp } famille génératrice est dite minimal si elle ne contient plus de vecteur superflus.
c.a.d. aucun des x1,…,xp ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres

Cette condition peut s'exprimer comme suit :

$\lambda 1x1 + \dots + \lambda pxp = 0$
$\Rightarrow \lambda 1 + \dots + \lambda p = 0$

Définition :

La famille de vecteur x1,…,xp est dite libre (linéairement indépendante) s
$\lambda 1x1 + \dots + \lambda pxp = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda 1 = \dots \ \lambda p = 0$

Terminologie :

Une famille non libre est dite liée :
- « Partie libre » : Aucun vecteur de la famille ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs
- « Partie li » : un certain vecteur s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Si la famille est constituée de deux vecteurs { x1, x2 } elle est libre si x1 et x2 ne sont pas colinéaire.
- Soit une famille constituée d'un seul vecteur { x1 } elle est libre ssi $x1 \neq 0$

Remarque :

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée

Exemple Trivial :

$\vec{i} = (1, 0, 0)$
$\vec{j} = (0, 1, 0)$
$\vec{k} = (0, 0, 1)$
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est libre dans $\mathbb{R}^3$
Si $\lambda \vec{i} + \lambda 2 \vec{j} + \lambda 3 \vec{k} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\lambda 1, \lambda 2, \lambda 3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \lambda 1 = \lambda 2 = \lambda 3 = 0$

Théorème :

Soit { x1,..,xp} famille de vecteur, une partie génératrice de E et { y1,…,yp } une famille libre dans E alors :

i) $p \geq n$

ii) Toute famille de E ayant strictement plus de p vecteurs est forcément liée

iii) Toute famille de E ayant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice.

Définition :

Une partie de E libre et génératrice est appelée base de E.

Proposition :

Si { e1,…,en } est une base de E alors $\forall$ x $\in$ E , il $\exists$ $\alpha 1, \ldots, \alpha n \in K$ uniques Tel que
$x = \alpha 1 e1 + \ldots + \alpha n en$

$\alpha 1, \ldots, \alpha n$ sont les coordonnées (ou composantes) de x dans la base { e1,…,en }

Preuve :

{ e1,…,en } est une base $\Rightarrow$ elle est une partie génératrice de E donc $\forall$ x $\in$ E, $\exists$ $\alpha 1, \ldots, \alpha n \in K$ tel que $x = \alpha 1 e1 + \ldots + \alpha n en$

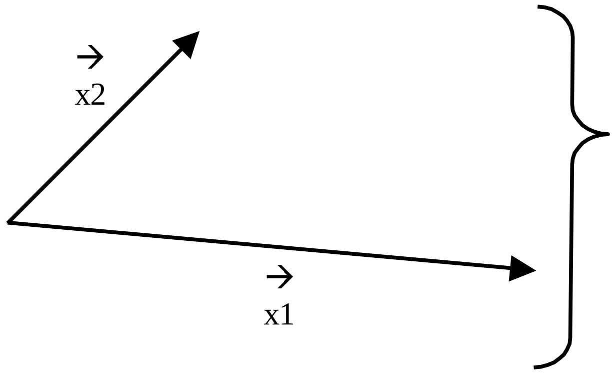
Montrons que $\alpha 1, \ldots, \alpha n$ sont uniques
Supposons que $x = \alpha 1 e1 + \ldots + \alpha n en = \lambda 1 e1 \ldots \lambda n en$.
$\Rightarrow$ $(\alpha 1 - \lambda 1) e1 + \ldots + (\alpha n - \lambda n) en = 0$
$\Rightarrow$ $(\alpha 1 - \lambda 1) = 0$ ... $(\alpha n - \lambda n) = 0$ comme la famille est libre
on obtient : $\alpha 1 = \lambda 1$ ... $\alpha n = \lambda n$.

Remarque :

Une base n'est pas unique

Exemple :

$\mathbb{R}^2$ si $\vec{x1}$, $\vec{x2}$ sont non colinéaires alors $\{ \vec{x1}, \vec{x2} \}$ définit une base de $\mathbb{R}^2$.



Définit un repère $\Rightarrow$ tout vecteur est définit par :

$\vec{x2}$ e $\vec{x1}$

Conséquence :

Si E est de dimension finie, si E1 et E2 sont des bases de E alors elles ont forcément le même nombre d'élément :

Card (E1) = Card (E2)

On suppose E1 est une base $\Rightarrow$ E1 est génératrice
On suppose E2 est une base $\Rightarrow$ E2 est libre
$\Rightarrow$ Card(E1) $\geq$ Card(E2)
On suppose E1 est une base $\Rightarrow$ E1 est libre
On suppose E2 est une base $\Rightarrow$ E2 est génératrice
$\Rightarrow$ Card(E 2) $\geq$ Card(E1)

$\Rightarrow$ Card(E1) = Card(E2)

Théorème et définition :

Soit E un K-ev de dimension finie alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur K , notés $\dim_K E$

Remarque :

La dimension de E dépend de K

Exemple :

$E = \mathbb{C}$
E est un $\mathbb{R}$-ev et aussi un $\mathbb{C}$-ev
Si E est un $\mathbb{R}$-ev

$\{1, i\}$ est une base

$z = ai + b$ avec $a, \quad \in \mathbb{R}$
$\lambda 1 + \lambda 2 i = 0 \Rightarrow \lambda 1 = \lambda 2 = 0$

$\Rightarrow$ La dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Si E est un $\mathbb{C}$-ev : $\{ 1 \}$ est une base soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \lambda.1$ ($\lambda = z$)
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

Remarque :

Si $E = \{ 0 \}$
E n'admet pas de base (par convention dim E = 0)

Exemple :

$\mathbb{R}^n$

Base de $\mathbb{R}^n = \{ e1, \dots, en \}$ où les vecteurs $ei = \{ 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \}$

$i^{\text{ième}}$

c'est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ donc d $\quad \mathbb{R}^n = n$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

Théorème :

Soit $\{x1, \dots, xn\}$ une famille de n vecteurs dans un EV E de dim n alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\{ x1, \dots, xn\}$ famille libre
ii) $\{ x1, \dots, xn\}$ est génératrice
iii) $\{ x1, \dots, xn\}$ est une base de E

Interprétation de ce résultat :

Pour peu que l'on connaisse la dimension de E (ici n), vérifier qu'une famille de n vecteurs est une base revient à vérifier que cette famille est libre ou génératrice.

<u>Théorème :</u>

Soit E un k-ev de dimension finie et F est sev de E alors dim F $\leq$ dim E
Si de plus on a égalité entre les dimensions alors F = E

<u>Utilité du résultat :</u>

Pour montrer l'égalité entre deux ev, il suffit d'établir une inclusion et l'égalité des dimensions.

<u>Théorème :</u>

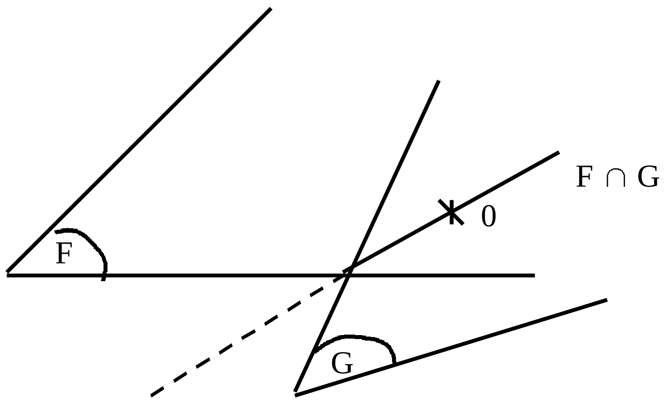
Soit E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + d \quad G - \dim(F \cap G)$$

Si F et G on pour intersection { 0 } alors dim (F + G } = dim F + dim G

<u>Exemple :</u>

E = $\mathbb{R}^3$, F et G sont des plans non confondus passant par 0



$F + G = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(F+G) = 3$
$\dim F = \dim G = 2$
$\dim(F \cap G) = 1$
$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

<u>Théorème :</u>

Soit E un K-ev fini et F, G sev de E. On a équivalence entre :

i) $E = F \oplus G$ (F et G sont des supplémentaires dans E)

ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

Rappels : $E = F \oplus G \Longleftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii)

On suppose $E = F \oplus G \Longleftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{ 0 \}$

On a donc $F \cap G = \{ 0 \}$ Montrons que $\dim E = \dim F + \dim G$

$E = F + G \Rightarrow \dim E = \dim (F + G)$
et $\dim (F + G) = \dim F + \dim G$ (cf théorème précédent)

ii) $\Rightarrow$ i)

On suppose que $F \cap G = \{ 0 \}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$
Pour montrer i) il suffit de montrer que $E = F + G$
On a $F + G \subset E$ car F et G sont des sev de E
de plus $\dim (F + G) = \dim F + \dim G = \dim E$ (par hypothèse)

donc $F + G \subset E$ et $\dim (F + G) = \dim E$
$\Rightarrow F + G = E$

Remarque :

Si F est un supplémentaire de G alors $\dim F = \dim E - \dim G$ (Tous les supplémentaires d'un sev G ont même d imension)

Terminologie :

- Un sev de dimension 1 est appelé une droite vectorielle
- Un sev de dimension 2 est appelé un plan vectorie
- Un sev de dimension n-1 est appelé un hyperplan vectoriel (n = dimension de E)

Définition du rang d'un système de vecteur :

Définition :

Soit $S = \{ x1,\ldots,xp \}$ est une famille de vecteurs de E, on définit le rang de S comme la dimension du sous espace engendré par $\{ x1,\ldots,xp\}$:

$rg(S) = \dim Vect(x1,\ldots xp)$

Remarque :

- rg(x1,…,xp) $\leq$ p

Exemple : rg{ x1, x2 , x1+x2 }
Vect { x1, x2, x1+x2 } = Vect { x1, x2 }
(x1 et x2 sont non colinéaires)
$\Rightarrow$ rg{ x1, x2 , x1+x2 } = rg { x1 , x2 } = 2

- rg { x1,…,xp } = p ssi { x1,…,xp } est libre

Cela revient à montrer que rg { x1,…,xp } = p $\Longleftrightarrow$ { 1,…,xp } est libre

- Montrons que rg { x1,…,xp } = p $\Leftarrow$ { x1,…,xp } est libre

On suppose que { x1,…,xp } est libre
On sait que { x1,…,xp } est un système générateur
{ x1,…,xp } engendre Vect{ x1,…,xp }
$\Rightarrow$ { x1,…,xp } base de Vect { x1,…,xp }
$\Rightarrow$ dim Vect { x1,…,xp } = p

- Montrons maintenant que rg { x1,…,xp } = p $\Rightarrow$ { x1,…,xp } est libre

On suppose que rg { x1,…,xp } = p $\Longleftrightarrow$ dim vect { x1,…,xp } = p
On sait de plus que { x1,…,xp } est un système générateur de Vect { x1,…,xp }
$\Rightarrow$ { x1,…, p } est libre

Chapitre V Applications linéaires

Définition et propriétés :

Définition :

Soit E et F deux K-ev . Une application :E $\rightarrow$ F est dite linéaire s :
i) Pour tout x, y $\in$ E ,on a f(x + y) = f(x) + f(y
ii) Pour tout x $\in$ E et $\lambda \in$ K , on a f λx) = λ f(x)

Terminologie :

- Si E = F on parle d'endomorphism
- Si f est linéaire et bijective on parle d'isomorphisme
- Si E = F et f linéaire et bijective on parle d'automorphisme

$\mathscr{L}$(E, F) est l'ensemble des app cations linéaires de E dans F.

$\mathscr{L}$(E) ensemble des endomorphismes de E

GL(E) Ensemble des automorphismes de E

Groupe Linéaire

Propriétés :

f : F $\rightarrow$ E linéaire

i) f(0) = 0
ii) $\forall$ x $\in$ E f(-x) = - f(x)
iii) Si λ1,..., λp sont des scalaires appartenant à K et x1,...,xp appartenant à E alors

$$f(\lambda 1x1+ ... + \lambda pxp) =\lambda 1f (x1) + ... + \lambda p f(xp)$$

II) Propriétés fonfamentales
1) Injectivité et surjectivité

Théorème :

$f : E \rightarrow F$ linéaire
i) Si A sev de E alors f(A) est sev de F
ii) Si B sev de F alors $f^{-1}(B)$ est sev de E

Corollaires et définitions

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors $^{-1}(\{ 0 \})$ est sev de E (Appelé Noyau) noté Ker
f(E) est un sev de F noté Im f (Image de f)

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors
1. f est injective $\Longleftrightarrow$ Ker f = { 0 } $\Longleftrightarrow$ $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. f est injective $\Longleftrightarrow$ Im (f) = E

Preuve

Définition de la surjectivité
1. On suppose que Ker f = { 0 } Montrons que f est injective

Si $f (x) = f (y) \quad \Rightarrow \quad f (x-y) = 0$

comme f est linéaire

$\mathrm{Ker}\, f = \{ x \in E \mid f (x) = 0 \}$
$f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}\, f$
Or Ker f = { 0 } $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ donc f est injective

2. On suppose que f est injective montrons que $f (x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f (x) = 0 = f (0)$ comme f est injective on a x = 0

2) Images de parties de E

Théorème : Soit $f = E \rightarrow F$ linéaire et {x1,…,xp} génératrice de E alors {f(x1),…,f(xp) } es génératrice de Im f

Preuve :

Soit $z \in E$ Im f , montrons que z s'exprime comme CL de { f(x1),…, f(xp) }
$\exists\, x \in E$ tel que z = f(x)
$x \in E$, {x1,…,xp } famille génératrice de E $\Rightarrow \exists\, \lambda 1,\dots, \lambda p \in K$ tel que $x = \lambda 1x1 + \dots + \lambda pxp$
$\Rightarrow z = f(\lambda 1x1 + \dots \lambda pxp) = \lambda 1f(x1) + \dots + \lambda f(xp)$

car f est linéaire $\quad \Rightarrow$ { f(x1),…,f(xp) } est génératrice de Im(f)

Corollaire :

Soit f linéaire e surjective, Si {x1,…,xp} est une famille génératrice de E alors { f(x1),…,f(xp)} est une famille génératrice de F.

Théorème :

Soit f : E → F linéaire. Si { x1,…,xp} es liée alors { f(x1},…,f(xp) } est liée.

Preuve :

On suppose que $xp = \lambda 1x1 + \lambda p_{-1}xp_{-1} \Rightarrow f(\ xp\ ) = f(\ \lambda 1x1) + \ldots + f(\lambda p_{-1}xp_{-1})$

f est linéaire

$\Rightarrow$ { f(x1),…,f(xp) } est liée

Corollaires :

Si { f(x1),…,f(xp)} est libre alors {x1,…,xp} est libre

Corollaire :

L'implication {x1,…,xp} est libre $\Rightarrow$ { f(x1),…,f(xp)} libre **est fausse**

Proposition :

Soit f une application linéaire injective . Si {x1,…,xp} est une famille libre alors {f(x1),…f(xp)} est libre

Théorème :

Soit f : E → F linéaire. On suppose que dim E < ∞. Soit {e1,…,ep} une base de E. On a l'équivalence suivante :

1. { f(e1),…,f(ep) } est une base de F
2. f est injective

Preuve :

2) $\Rightarrow$ 1) On suppose f bijective

Par hypothèse { e1,…,en } base de E $\Longleftrightarrow$ { e1,…,en } est génératrice et { e1,…,en } est libre

$\Rightarrow$ { f(e1),…,f(en) } génératrice de F (Car f est surjective)

$\Rightarrow$ { f(e1),…,f(en) } est libre (Car f est injective)

$\Rightarrow$ { f(e1),…f(en) } est une base de F

Corollaire :

Si f : E→F est linéaire et bijective alors dim E = dim F.
Si dim E ≠ dim F alors f : E→F linéaire n'est pas bijective.

Théorème :

Soient E et F deux K-ev de dimensions finies et égales.
Soit f : E → F linéaire, les propriétés sont équivalentes :

1. f est injective (⟸⟹ Ker f = { 0 })
2. f est surjective (⟸⟹ Im f = F)
3. f est bijective

Preuve :

1. ⇒ 3.
On suppose f injective.
Soit {e1,…,en } une base de E.
Montrons que { f(e1),…, f(en) }
est une base de F (⇒ alors f est injective)
Comme f est injective et que {e1,…,en } est libre (comme c'est une base) alors
{ f(e1),…, f(en) } est libre
or Card({ f(e1),…, f(en) }) = n = dim E = dim F   Donc { f(e1),…, f(en) } libre
Card ({ f(e1),…, f(en) }) = dim F
⇒ { f(e1),…, f(en) } base de F   donc F est bijective

Théorème du rang :

Soit E, F deux K-ev tel que dim E < ∞.
Soit f : E → F linéaire alors dim E = dim Ker f + dim Im(f)
(rang de f : dim Im (f))

3) Matrice associée à une application linéaire. On considère : E → F (E, F - ev de dimension finie)

n = dim E   p = dim F

On considère $\mathscr{E}$ = { e1,…,en } base de E et $\mathscr{F}$ = {f1,…,fp} base de F
On construit le tableau de scalaire suivant où dans la I ième colonne sont exprimées les composantes de f(ei) dans la base { f1,…,fp }

$$A = \begin{array}{cccccccc} f(e1) & f(e2) & \dots & f(ei) & \dots & f(en) & \\ \left[\begin{matrix} a11 \\ a21 \\ \cdots \\ ap1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a12 \\ a22 \\ \cdots \\ ap2 \end{matrix} & & \begin{matrix} a1i \\ a2i \\ \cdots \\ api \end{matrix} & & \left.\begin{matrix} a1n \\ a2n \\ \cdots \\ apn \end{matrix}\right] & \begin{matrix} f1 \\ f2 \\ \cdots \\ fp \end{matrix} \end{array}$$

f(e1) ∈ F et { f1,...,fp } base de F

Ce tableau de scalaire est appelé matrice de F relative aux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$
On note A = Mat(f, $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$)

<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$f(x, y, z) = (x + 2y – z , x + 2z , y – z –x +3 y)$

Attention, il faut vérifier que f est linéaire

$\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ sont les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

Calcul de A = Mat(f, $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$)

f(e1) = (1,1,0,-1)
f(e2) = (2,0,1,3)
f(e3) =(-1,2,-1,0)

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e1) & f(e2) & f(e3) \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \end{matrix} \end{array}$$

<u>Remarques :</u>

Si dim E = n , dim F = p.
A est constituée de n colonnes et p lignes

<u>Produit d’une matrice et d’un vecteu</u>

Si A est constituée de n colonnes et p lignes et
si X est un vecteur constitué de n composantes $\in K^n$
X = (x1,…,xn)

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a1i & a1n \\ a21 & a22 & a2i & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ap1 & ap2 & api & apn \end{bmatrix}$$

$$A . X = \begin{bmatrix} a11x1 & a12x2 & a1ixi & a1nxn \\ a21x1 & a22x2 & a2i & a2nxn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ap1x1 & ap2x2 & apixi & apnxn \end{bmatrix} \in K^p$$