I) Espaces métriques :

1) Définition :

On appelle espace métrique tout couple (E, d) où d est une application d : $E \Delta E \rightarrow ⌋$
telle que X, Y, Z ι E

d (X, Y) = d (Y, X)
d (X,Y) ≥ 0 et si d (X ,Y) = 0 ⟺ X = Y
d (X,Y) ≤ d (X , Z) + d (Z , Y) // Inégalité triangulaire

Une telle application est appelée une distance

Remarque :

Parfois pour abréger, on dit que E est un espace métrique, au lieu de dire que (E, d) est un espace métrique.

Exemple :

a) Distance usuelles sur E = $⌋^n$
On prend X = (x1,…,xn) , Y = (y1,…,yn) deux éléments de $⌋^n$
Les relations suivantes définissent des distances sur $⌋^n$

$d (X, Y) = \sqrt{(x1-y1)^2 + (x2-y2)^2 + \ldots + (xn-yn)^2} \qquad = \sqrt{{}_{i=1}^{n} (xi-yi)^2}$

distance Euclidienne

$d1 (X, Y) = {}_{i=1}^{n} | xi- yi |$

d2 (X, Y) = max { | xi-yi | , i=1,…,n }

Les trois distances coïncident seulement pour n = 1 (On se situe alors dans ⌋ , E = ⌋)

Pour n = 2

Si on prend X = (1,0) , Y = (0,1)

$d (X, Y) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(2)}$

d1 (X, Y) = |1-0| + |0-1| = 2

d2 (X, Y) = Max { | 1-0| , |0-1| } = 1

On voit que ces distances sont différentes pour n ≅1 b) Distance discrète : On a un ensemble E, on définit d comme

$d (X, X) = 0$
$d (X, Y) = 1$ Si $X \cong Y$

c) Distance définie par une norme

<u>Définition d'une norme :</u>

Soit E un K-espace vectoriel, une norme sur E est une application qui associe à X la norme de X ($X \rightarrow \|X\|$) telle que :

$\|X\| \geq 0$ et si $\|X\| = 0 \Longleftrightarrow X = 0$
$\| \nabla X \| = | \nabla | . \|X\|$
$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Une telle application est appelée norme de E, on dit que E est un espace normé.
La norme définit une distance par $d (X, Y) = \| X - Y \|$

On va montrer que cette application est une distance

$d (X,Y) = \| X - Y \| \geq 0$ car la norme ≥ 0
$d (X, Y) = 0 \Longleftrightarrow \| X - Y \| = 0 \Longleftrightarrow X - Y = 0 \Longleftrightarrow X = Y$
$d (X,Y) = \| X - Y \| = \| (-1) (Y - X) \| = |-1| . \| Y - X \| = d (Y, X)$

$X - Y = (X - Z) + (Z - Y)$ où Z est élément de E
donc $\| X - Y \| = \| (X- Z) + (Z-Y) \|$
On a $d (X , Y) \leq \| X - Z \| + \| Z - Y \| = d (X , Z) + d (Z, Y)$
On a montré ici l'inégalité triangulaire

<u>2) Sphères, Boules :</u>

On a un espace métrique (E, d) .
Soit $r \geq 0$ et a ι E fixés
On définit les relations $d(a, X) = r$
$d(a, X) \leq r$
$d(a, X) < r$
Ces relations définissent respectivement la sphère S (a, r), la boule fermée B (a, r] et la boule ouverte B (a, r [de centre a et de rayon r.
C'est à dire

la S (a, r) = {X ι E | d (a, X) = r }
la B (a, r] = {X ι E | d (a, X) ≤ r }
la B (a, r [= {X ι E | d (a, X) < r }

Cas particulier lorsque r = 0

S (a, 0) = {X ι E | d (a, X) = 0 } = { a }
B (a, 0] = {X ι E | d (a, X) ≤ 0 } = { a }
B (a, 0 [= {X ι E | d (a, X) < 0 } = ∅ : ensemble vide

Quand on parle d'une boule ouverte on suppose toujours que r > 0.

Pour n = 1 on est dans $\mathbb{R}$ donc $d(X, Y) = |X - Y|$

$S(a, r) = \{X \in E \mid d(a, X) = |X - a| = r\} = \{a-r, a+r\}$

$B(a, r] = \{X \in E \mid d(a, X) = |a - X| \leq r\} = [a-r, a+r]$

$B(a, r[= \{X \in E \mid d(a, X) = |a - X| < r\} =]a-r, a+r[$

Pour n = 2 on est dans $\mathbb{R}^2$

$X = (x1, x2)$, $Y = (y1, y2)$

$d(X, Y) = \sqrt{(x1-y1)^2 + (x2-y2)^2}$ (Distance Euclidienne)

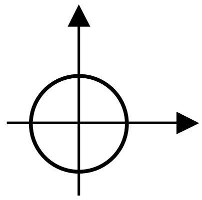
$d1(X, Y) = |x1-y1| + |x2-y2|$

$d2(X, Y) = \mathrm{Max}\{|x1-y1|, |x2-y2|\}$

On regarde les boules et les sphères centrées sur l'origine

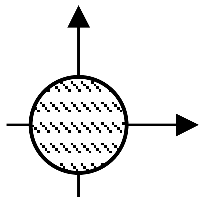
$a = 0_E = (0, 0)$

$S(0, r) = \{X = (x1,x2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, X) = r\}$



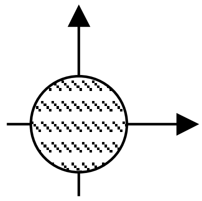
$\sqrt{(x1)^2 + (x2)^2} = r$

$B(0, r] = \{X = (x1,x2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, X) \leq r\}$



$\sqrt{(x1)^2 + (x2)^2} \leq r$

$B(0, r[= \{X = (x1,x2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, X) < r\}$

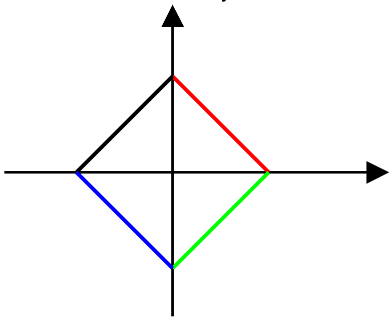


$\sqrt{(x1)^2 + (x2)^2} < r$

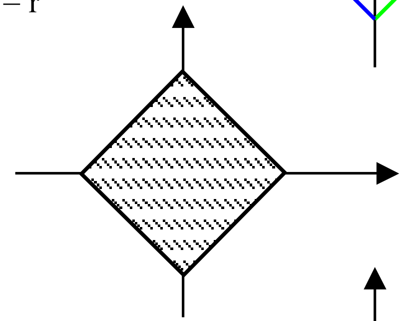
$d1(X, Y) = |x1-y1| + |x2-y2|$

$S(0, r) = \{ X = (x1,x2) \mid \quad |x1| + |x2| = r \}$

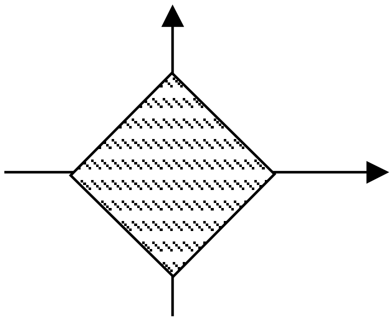
1. Si $x1, x2 \geq 0$ alors $x1+x2 = r$
2. Si $x1, x2 < 0$ alors $-x1 - x2 = r \Rightarrow x1 + x2 = -r$
3. Si $x1 \geq 0$ et $x2 < 0$ alors $x1-x2 = r$
4. Si $x < 0$ et $x2 \geq 0$ alors $-x1 + x2 = r$



$B(0, r] = \{ X = (x1, x2) \mid \quad |x1| + |x2| \leq r \}$



$B(0, r[= \{ X = (x1, x2) \mid \quad |x1| + |x2| < r \}$



$d2(X, Y) = \text{Max} \{ |x1 - y1|, |x2 - y2| \}$

$S(0, r) = \{ X = (x1,x2) \mid \quad \text{Max} \{ |x1| , |x2| \} = r \}$

$B(0, r] = \{ X = (x1, x2) \mid \quad \text{Max} \{ |x1| , |x2| \} \leq r \}$

$B(0, r[= \{ X = (x1, x2) \mid \mid \quad \text{Max} \{ |x1| , |x2| \} \leq r \}$

Exercice :

d : distance discrète
Trouver : $S(a, r)$, $B(a, r]$ et $B(a, r[$

$d(X, X) = 0$
$d(X, Y) = 1$ Si $X \cong Y$

3) Parties ouvertes, fermées :

3.1) Parties ouvertes :

Propriétés fondamentales des boules ouvertes
Soit B(a, r [une boule ouverte et X ι B(a, r [

Posons r1 = r – d(a, X)
alors B(X, r1 [_ B(a, r [

Preuve :

X ι B(a, r [⇐⇒ d(a, X) < r et par conséquent r – d(a, X) > 0
donc r1 > 0

Soit Y ι B(X, r1 [, montrons que Y ι B(a, r [, il suffit de montrer que d(a, Y) < r
Y ι B(X, r1 [⇒ d(X, Y) < r1 = r – d(a, X)
d(a, Y) ≤ d(a, X) + d(X, Y)   (D'après l'inégalité triangulaire)

⇒ d(a, Y) < d(a, X) + (r – d(a, X)) = r
⇒ Y ι B(a, r [⇒ B(X, r1[_ B(a, r [

Définitions :

Une partie A de E est dite ouverte si A ≅ 0 ou si x ι A, φ r > 0 tel que B(x, r [_ A

Exemple :

- Toute boule ouverte est un ouvert (d'après la propriété fondamentale des boules ouvertes)
- Dans ⌡] a, b [avec a < b est un ensemble ouvert.

Exercice :

Montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert

Soit B(a, r] et E – B(a, r] (son complémentaire)

Si Y ι E – B(a, r], montrer qu'il φ un r1 tel que B(Y, r1 [_ E – B(a, r]

Propriétés des ensembles ouverts :

a) La partie vide et E sont des ouverts A prouver
b) La réunion d'ensembles ouverts est un ouvert A prouver
c) L'intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert

Preuve du c) :

A1,A2,…,An des ensembles ouverts
Soit A = A1OA2O…OAn
Pour montrer que A est un ouvert
Soit X ι A ⇒ X ι Ai, i=1,…,n
Puisque Ai est ouvert, il φ un ri > 0 tel que B(X, ri [_ Ai.

Posons r = min { ri, i=1,…,n } ⇒ r ≤ r1 i
B(x, r [_ B(x, ri [_Ai
B(x, r [_Ai i
⇒ B(x, r [_ A1OA2O…OAn

Remarque :

L'intersection non finie d'ensembles ouverts n'est pas toujours un ouvert

Exemple :

Si on prend B(a, 1/n [, n > 0
En prenant l'intersection de toutes les boules B(a, 1/n [n > 0 est { a }

Preuve :

Prenons X appartenant à cette intersection
0 ≤ d(a , X) < 1/ n , n

0 ≤ ∇ < 1/n n
Si ∇ ≅ 0, Soit n0 = ⌈1/∇⌉ + 1

Partie supérieure entière de 1 / ∇

On a donc n0 > 1 / ∇
⇒ ∇ > 1/n0 (Il y a contradiction ici avec ∇ < 1/n n)
Donc si on a 0 ≤ ∇ < 1/n n ⇒ ∇ = 0

donc si on a 0 ≤ d(a, X) < 1/n n
⇒ d(a, X) = 0 ⇒ X = a

3.2) Parties fermées :

Définition :

On dit que A est fermée si $A^c = E - A$ est un ouvert

Exemple :

Dans ⌋, on prend l'intervalle [a, b]

[a, b]^c =]-∞, a [N]b , + ∞ [. Comme l'union de deux ouverts est un ouvert donc [a, b] est fermé.

Exemple :

E – B(x, r] est un ouvert ⇒ toute boule fermée est un ensemble fermé.
Toute partie de E est fermée

Preuve :

Soit A = {x1,x2,…, xn }
Montrons que E – A est un ouvert
Soit X ι E – A
Posons r = min { d(X, Xi) i =1,…,n }
Comme X ≅ Xi, on a d(X, Xi) > 0
donc r > 0

Montrons que B(X, r [_ E- A
Il suffit de montrer que B(X, r [O A = 0
(Ce qui impliquerait que B(X, r [_ E – A)

Soit Xi ι A
d(X, Xi) ≥ r ⇒ Xi η B(X, r [
par conséquent B(X, r [_ E – A

Remarque :

En général, une partie A n'est ni ouverte, ni fermée.

Exemple :

On prend l'intervalle [a, b [(avec a < b). Cet intervalle n'est pas ouvert, et il n'est pas fermé car [a, b [^{c} =]-∞, a [N [b, +∞ [.

Chapitre II) Continuité, Dérivabilité :

1. Continuité :

Définition :

Soit f une fonction réelle ou complexe définie sur un intervalle I de ⌋. Soit x0 ι I. On dit que f est continue en x0 si $\lim_{x \to x0} f(x) = f(x0)$

Propriété caractéristique :

f est continue en x0 ssi pour toute suite (xn) qui converge vers x0, la suite f(xn) converge vers f(x0). xn tend vers x0 (xn → x0) ⇒ f(xn) → f(x0)

Exemple :

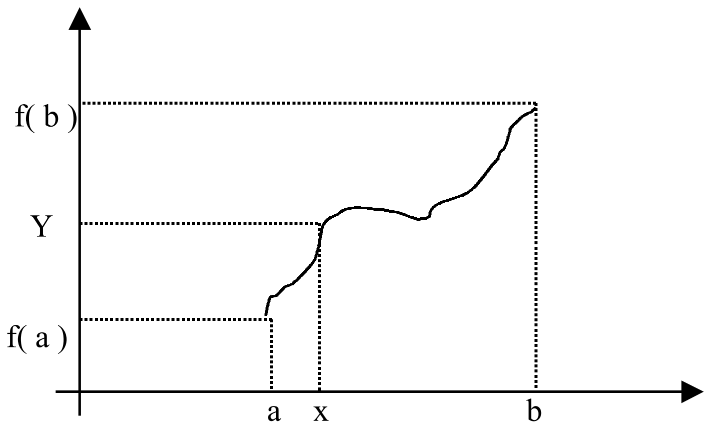
On considère f(x) = sin(1/x) si x ≅ 0 et f(x) = 0 si x = 0
f est-elle continue ?

Soit la suite xn = 1 / (2n◊ + ◊/2)
xn tend vers 0
f(xn) = sin(1/ xn) = sin(2n◊ + ◊/2) = 1 n
lim f(xn) = 1 ≅ f(0) = 0
n → + ∞

donc f <u>n'est pas continue</u> en 0.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue sur [a, b]. Alors pour tout Y compris entre f(a) et f(b), il existe un x ι [a, b] tel que f(x) = Y



Exemple :

$f(x) = x^5 + x^2 - 1$

Montrer que f(x) = ½ a une solution dans [0, 1]

f est une fonction continue sur [0, 1] , f(0) = -1 et f(1) = 1
comme ½ ι [f(0) , f(1)] , il existe un x ι [0, 1] tel que f(x) = ½

Corollaires :

Si f est une fonction continue sur [a, b]. Si $f(a).f(b) \leq 0$. Alors il existe c ι [a, b] tel que $f(c) = 0$

Preuve :

Puisque $f(a).f(b) \leq 0$ donc f(a) et f(b) sont de signe différent.
Donc 0 compris entre f(a) et f(b), donc d'après le théorème il existe c tel que $f(c) = 0$.

Ce théorème est à la base de la méthode de bissection.

On cherche $f(x) = 0$, on prend un intervalle [a, b] tel que $f(a).f(b) \leq 0$

On prend $(a+b)/2$ et on regarde si $f((a+b)/2).f(b) \leq 0$ et on parcourt jusqu'à trouvé c.

Exemple :

Une personne parcourt à vélo une distance de 20 Km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure ($[t0, t0+ \frac{1}{2}]$) pendant lequel elle parcourt exactement 10 Km.

Solution :

Soit f la fonction distance en fonction du temps

$f(0) = 0$ et $f(1) = 20$
f est continue sur [0, 1], on cherche l'existence d'un t0 ι $[0, \frac{1}{2}]$ tel que
$[f(t0+\frac{1}{2}) – f(t0)] = 10$

Soit $g(t) = f(t+ \frac{1}{2}) – f(1) – 10$.
G est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $g(0) = f(\frac{1}{2}) – f(0) – 10$
$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) – f(\frac{1}{2}) – 10 = 20 – f(\frac{1}{2}) –10 = 10 – f(\frac{1}{2}) = - g(0)$

$g(0) . g(\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow$ il existe t0 ι $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(t0) = 0$
$\Rightarrow f(t0 + \frac{1}{2}) – f(t0) – 10 = 0$
$\Rightarrow f(t0 + \frac{1}{2}) –f(t0) = 10$.
Donc il existe un intervalle d'une demi-heure dans lequel on parcourt exactement 10 Km.

2. Dérivabilité

Définition :

Soit f une fonction définie sur I. Soit x0 ι I. On dit que f est dérivable en x0 si $\lim\limits_{x \to x0} \dfrac{f(x) - f(x0)}{x - x0}$ existe ET est finie.

Cette limite s'écrit alors f '(x0)

$$\lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0} = \lim_{x \to x0} \frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h}$$

---

f est dérivable en x0 si

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x0+h) - f(x0)}{h}$$

On suppose que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x0+h) - f(x0)}{h}$$

existent et sont finies.

Exemple :

Utiliser la définition de la dérivée pour calculer $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) / x$

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) / x = \lim_{x \to 0} (\sin(x) - \sin(0)) / (x- 0)$$

D'après la définition de la dérivée en prenant f(x) = sin x et f '(x) = cos x
donc $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) / x = f '(0) = \cos(0) = 1$

Rappel :

Si f est dérivable en x0 alors f est continue en x0.
La réciproque est fausse :
On considère la fonction f(x) = |x|
f(x) = x si x ≥ 0 et f(x) = -x si x < 0
C'est une fonction continue en zéro

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} h / h = 1$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x0+h) - f(x0)}{h} = \lim \frac{f(h) - 0}{h} = -h / h = -1$$

Les dérivés à gauche et à droite ne sont pas égales ⇒ f n'est donc pas dérivable x0 = 0

Théorème de ROLLE :

Soit f continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[tel que f(a) = f(b) alors il existe c ı]a, b[tel que f '(c) = 0

Théorème des accroissements finis :

Soit f continue sur [a, b], dérivable sur]a, b[. Alors il existe c appartenant à]a, b[tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Conséquences de ce théorème :

1. f est croissante ⟺ f '(x) ≥ 0, x ı]a, b[
2. f est décroissante ⟺ f '(x) ≤ 0 , x ı]a, b[
3. Si f '(x) = 0, x ı]a, b[alors f est constante.

Théorème du point fixe :

Soit f continue sur[a, b] alors il existe c ı [a, b] tel que f(c) = c (Point fixe)
De plus, si f est dérivable sur [a, b] tel qu'il existe K tel que | f '(x) | ≤ K < 1, x ı [a, b]
Alors c est unique

Exemple :

$g(x) = (x^2 - 1) / 3$ sur [-1, 1]
g : [-1, 1] → [-1, 1]
g est une application continue sur [-1, 1]

Alors il existe c tel que g(c) = c
g est dérivable sur [-1, 1]
| g '(x) | = | 2x / 3 | ≤ 2/3 < 1

comme x < 1

donc c est unique

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 0 \iff g(x) = x \\ g(x) = f(x) + x \\ (\, g(x) = x \iff f(x) + x = x \iff f(x) = 0 \,) \end{array}}$$

Règle de l'Hospital :

f, g définies sur I tel que

1. f, g sont continues sur I
2. f, g sont dérivables sur I sauf peut être pour x0 ι I
3. $g'(x) \cong 0, \quad x \cong x0$
4. $f(x0) = g(x0) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to x0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ est définie (Existe et est finie)

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x0} \frac{f(x0)}{g(x0)} = \lim_{x \to x0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + e^{x}}{x}$$

$f(x) = e^{2x} + e^{x}$
$g(x) = x$

$g'(x) = 1 \cong 0$ et $f(x0) = g(x0) = 0$
On applique la règle :

$f'(x) = 2\,e^{2x} - e^{x}$
$g'(x) = 1$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2\,e^{2x} - e^{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} (2\,e^{2x} - e^{x}) = 1$$

Cette limite existe et est finie, par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{x} = 1$

Exercice :

$f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue

Montrer qu'il existe x0 ι [0, 1] tel que $f(x0) = x0$

Chapitre III)

Suites numériques :

1. Généralités :

Définition :

Une suite dans E (Souvent E = ⌋) est une application n → Un de ⌋ dans E, notée (Un) ou (Un) n≥0 ou (U0, U1, ….,Un,…)

-Suite majorée :

Une suite (Un) est majorée s'il existe M tel que Un ≤ M,   n ι ⌋

-Suite minorée :

Une suie (Un) est minorée, s'il existe m tel que Un ≥ m,   n ι ⌋

-Suite bornée :

Un suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée
(i.e. il existe M, m tels que m ≤ Un≤M   n ι ⌋)

Exercice :

La suite (Un) est bornée ssi il existe A ι ⌋+ tel que | Un | ≤ A

-Suite croissante :

Une suite (Un) est croissante (respectivement décroissante) si   n ι ⌋ Un+1 ≥ Un
(Respectivement Un+1 ≤ Un)

-Suite stationnaire :

Une suite (Un) est stationnaire (ou stationnaire à partir d'un certain rans) 'il existe n0 tel que si n ≥ n0 ⇒ Un+1 = Un

-Suite extraite :

On dit que la suite (Vn) est une suite extraite de (Un) s'il existe une application g de ⌋ dans ⌋ strictement croissante telle que Vn = U g(n) ,   n ι ⌋

Exemple :

U0, U1, …, Un ,…

V0 = U3	g(0) = 3
V1 = U7	g(1) = 7
V2 = U11	g(2) = 11

Si on prend g(n) = 2n on a (Vn), Vn = U2n

2. Limite d'une suite :

2.1 Suite convergente :

On dit que la suite (Un) converge (tend vers) une limite L , ssi $\varepsilon > 0$, il existe p ι ⌋ si $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < \varepsilon$
Une telle suite est dite convergente

- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente

Remarque :

- $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < \varepsilon$ signifie qu'à partir d'un certain rang tous les éléments de la suite se trouvent dans la boule ouverte centrée sur L et de rayon ε
- p dépend de ε

Exemple :

$Un = 1 / n$

On sait que $L = 0$
On nous donne $\varepsilon > 0$
Il faut trouver p tel que $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < \varepsilon$

Soit $p = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$

Partie entière supérieur

Si $n \geq p \Rightarrow n < 1/\varepsilon$ car $p > 1/\varepsilon$
$1/n < \varepsilon$
$|Un - 0| < \varepsilon$

Comment trouver p à partir de ε ?

On a $\varepsilon > 0$.
On cherche p qui vérifie la propriété
On veut que $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < \varepsilon$
On sait que $1/n < \varepsilon$
$\Rightarrow n > 1/\varepsilon$
donc on prend p qui est supérieur à $1/\varepsilon$

Exemple :

Soit (Un) une suite de ⌉ convergente . Montrer que (Un) est stationnaire à partir d'un certain rang.

Preuve :

Supposons que cette suite converge vers L , On sait que ε , il existe p ι ⌋ tel que $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < \varepsilon$

En prenant $\varepsilon = 0.01$
Il existe p tel que $n \geq 0.01$

$\Rightarrow |Un - L| < 0.01$
c .a.d $L - 0.01 < Un < L + 0.01$
donc $n \geq p \Rightarrow Un = L$
$n \geq p \Rightarrow Un+1 = Un$

Théorème sur l'unicité de la limite :

La limite 'une suite (lorsqu'elle existe) est unique

Propriété : Toute suite numérique convergente est bornée.
Preuve : Soit (Un) une suite qui converge vers L. On va montrer que cette suite est bornée
Comme la suite est convergente $\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$, il existe p ι ⌋, $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < \varepsilon$
Soit $\varepsilon = 1$ alors il existe p tel que $n \geq p \Rightarrow |Un - L| < 1$
c.a.d $n \geq p$ on a $L-1 < Un < L+1$
Si on pose :

$M = Sup(U0, U1, \ldots, Up-1, L+1)$
$m = inf(U0, U1, \ldots, Up-1, L-1)$

Si $n \geq p \Rightarrow Un < L+1 \leq M$
si $n < p \Rightarrow Un \leq M$
$Un \geq m$ n
$n \geq p \Rightarrow Un > L-1 \geq m$
On obtient $m \leq Un \leq M$, n ι ⌋

La réciproque est fausse :

$Un = (-1)^n$ est une suite bornée
$|Un| \leq 1$, n
Autre exemple Un = sin(n)
Un est bornée $|\sin(n)| \leq 1$ mais elles ne sont pas convergentes

Théorème de la suite Extraite :

Si la suite (Un) converge vers L, Alors toute suite extraite de (Un) converge vers L

Conséquence 1 :

Si (Vn) est une suite extraite de (Un) et (Vn) est divergente $\Rightarrow$ (Un) est divergente

Conséquence 2 :

Si (Vn) et (Wn) deux suites extraites de (Un) telles que
$Vn \rightarrow L1$
$Wn \rightarrow L2$
Si $L1 \cong L2 \Rightarrow$ (Un) est divergente

Exemple :

$Un = (-1)^n$

Soit (Vn) Vn = U2n et (Wn) Wn = U2n + 1

$Vn = U2n = (-1)^{2n} = +1$ n
$Wn = U2n+1 = (-1)^{2n+1} = -1$ n
Lim Vn = 1 Lim Wn = -1
n → +∞ n→ +∞

Lim Vn ≅ Lim Wn donc (Un) est divergente

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse
(Un) peut être divergente et (Vn) une suite extraite de (Un) peut être convergente
$Un = (-1)^n$: divergente
$Vn = (-1)^{2n}$: converge vers 1

Preuve de ce théorème :

Soit (Vn) une suite extraite (Un) c.a.d il existe g de ⌋ dans ⌋ strictement croissante telle que Vn = Ug(n).

Soit ε > 0 , Montrons qu'il existe p ι ⌋ tel que n ≥ p ⇒ | Vn – L | < ε
Puisque (Un) est convergente ⇒ il existe p1 ι ⌋ tel que
n≥p1 ⇒ | Un – L | < ε (1)
g(k) > g-k+1) K ι ⌋*
⇒ g(k) ≥g(k-1)+1
⇒g(k)≥(g(k-2)+1)+1
…
⇒g(k) ≥ g(0) + K (2)

Posons p = p1 – g(0)

n≥p ⇒ n≥ p1-g(0) ⇒ g(n) ≥ g(p1-g(0)) car g est strictement croissante
appliquons (2) sur p1-g(0)

On a g(n) ≥ g(p1- g(0)) ≥ (p1 – g(0)) + g(0)
⇒ g(n) ≥ p1
D'après (1) puisque g(n) ≥ p1
On a | Ug(n) – L |< ε ⇒ |Vn – L | < ε
Ce qui prouve que la suite (Vn) est convergente (Vn → L)

Résultat :

Soit (un) une suite
Si des suites extraites de (Un) convergent vers la même limite , alors (Un) converge vers L si chaque terme de (Un) appartient à une des suites étudiées.

Par exemple :

(U2n) , (U2n+1) chaque terme de (Un) ι soit à (U2n) soit à (U2n+1)

Théorème :

Si (U2n) et (U2n+1) convergent vers la m^me limite L, alors (Un) converge vers L

Preuve :

2.2 Limites infinies :

On dit que la suite (Un) tend vers +∞ ssi A > 0, il existe p ι ⌋ tel que n > p ⇒ Un > A .
On dit que la suite (Un) tend vers -∞ si la suite (-Un) → +∞ A > 0, il existe p ι ⌋ tel que n≥ p ⇒ -Un > A ou (Un < -A)

Ces suites sont divergentes

Exemple :

Soit a > 0 On considère la suite définit par Un = n^a
Montrons que Un → +∞
Si on nous donne A> 0 , il s'agit de trouver P ι ⌋ tel que n≥p ⇒ Un > A

Posons p = 1 + ⌈ $A^{1/a}$ ⌉ c.a.d p > $A^{1/a}$
Soit n ι ⌋ tel que n≥p ⇒ $A^{1/a}$ ⇒ n^a > A et donc Un > A
donc $\lim_{n \to +\infty} Un = +\infty$

3. Suite de Cauchy :

Définition : Une suite (Un) est dite de Cauchy si :
ε > 0, Il existe p ι ⌋ tel que si n≥p et m ≥p ⇒ | Un – Um| < ε

Théorème :

Toute suite convergente est de Cauchy

Preuve :

Soit (Un) une suite qui converge vers L.
On va montrer que (Un) est de Cauchy
ε > 0, Il existe p ι ⌋ tel que si n≥p et m ≥p ⇒ | Un – Um| < ε

Soit ε > 0. Montrons l'existence d'un tel p
Posons ε1 = ε/2 > 0
Puisque la suite (Un) est convergente vers L
⇒ Il existe p ι ⌋ tel que n ≥p ⇒ | Un – L | < ε1 = ε/2

Si $n \geq p$ et $m \geq p$, alors on a :
$| U_n - U_m | = | U_n - L + L - U_m | \leq | U_n - L | + | L - U_m | < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
donc (Un) est de Cauchy

Théorème :

Soit (Un) une suite de ⌋ (Un) converge ssi (Un) est de Cauchy

En utilisant Cauchy, on peut monter qu'une suite est convergente ou non sans passée par sa limite

Remarque :

On peut utiliser ce résultat pour montrer la divergence d'une suite (Un)
(Suite de Cauchy :
$\varepsilon > 0$, Il existe p ι ⌋ tel que $n \geq p$ et $m \geq p \Rightarrow | U_n - U_m| < \varepsilon$

Négation de Suite de Cauchy
Il existe $\varepsilon > 0$, p ι ⌋ il existe $n \geq p$ et $m \geq p \Rightarrow | U_n - U_m| > 0$)

Exemple :

$U_n = {}^{n}_{k=1} 1/K = 1 + ½ + \ldots + 1/n$
Pour montrer que la suite (Un) est divergente, il suffit de montrer que Un n'est pas de Cauchy
$U_{2n} = 1 + ½ + \ldots + 1/n + 1/2n$

posons $\varepsilon = ½$
Soit p ι ⌋
Posons $n = 2p$ et $m = p$ ($n \geq p$ et $m \geq p$)
$|U_n - U_m| = | U_{2p} - U_p| = | 1/(p+1) + 1/(p+2) + \ldots + 1/(p+p)$
$1/(p+1) \geq 1/(p+p)$
$1/(p+2) \geq 1/(p+p)$
…
$1/(p+p) \geq 1/(p+p)$
$|U_{2n} - U_n| > p (1/(p+p)) = ½$
$|U_n - U_m| > ½$

Pour montrer la divergence, on prend souvent $|U_{2n} - U_n|$

Corollaire :

Tout ensemble non vide de ⌋ majorée(respectivement minoré) admet une borne supérieure (respectivement une borne inférieure)

Théorème des suites monotones :

Toute suite de ⌋ croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) converge vers sa borne supérieure (respectivement converge vers sa borne inférieure)

Preuve :

Soit (Un) une suite croissante et majorée
Considérons l'ensemble A = { Un, n ι ⌋ }
Cet ensemble est majorée car la suite est majorée, il existe M tel que Un ≤ M   n
donc A est une partie non vide ⇒ il existe S = Sup A = Sup (Un, n ι ⌋)
Montrons que la $\lim_{n \to +\infty} Un = S$

Si S = Sup A ⟺ x ≤ S   x ι A (majorant) **et**   ε > 0, il existe x ι A tel que x > S - ε

Soit ε > 0, il existe Up ι A tel que S - ε < Up
Soit n ≥ p ⇒ S - ε < Up ≤ Un ≤ S < S + ε (Comme la suite est croissante)

S - ε < Un < S + ε
- ε < Un – S < + ε ⇒ |Un – S | < ε donc Un converge vers S.

<u>Exemple :</u>

Un = $^{n}{}_{k=0}$ 1/K ! = 1/0! + 1/1 !+…+1/n !

Montrons que cette suite vérifie les conditions du théorème :

- Un croissante en effet si on prend Un+1 – Un =
  (1/0 !+1/1 !+…+1/n!+1/(n+1) !) - (1/0 !+1/1 !+…+1/n !)
  = 1/ (n+1) ! >0
  (Un est croissante)
- (Un) est majorée
  Un = 1/0! + 1/1 !+…+1/n ! = 1 + 1/1*1 + 1/1*2 + 1/1*2*3+…+1/1*…*n
  3 ! = 2*3 > 2*2
  4 ! = 2*3*4 > 2*2*2 = 2^3
  n ! = 1*2*…*n > $2^{(n-1)}$

1/3 ! < $(1/2)^2$
1/4 ! <$(1/2)^3$
1/n ! <$(1/2)^{n-1}$

⇒ Un = 1 + 1 + ½ + $(1/2)^2$ + …+ $(1/2)^{n-1}$ = 1 + (1 + ½ + $(1/2)^2$ + …+ $(1/2)^{n-1}$)

Rappel : $1+a+a^2 + \ldots + a^n = (1-a^{n+1}) / 1-a$

donc Un = 1 + (1-$(1/2)^n$) / 1-(1/2) = 1+2(1-$(1/2)^n$) = 3 – 2$(1/2)^n$ =
3 – $(1/2)^{n-1}$ ≤ 3

<u>Conclusion :</u> (Un) est majorée

Comme (Un) est majorée et croissante alors (Un) est convergente.

4. Opérations algébriques sur les suites :

(Un) et (Vn) deux suites réelles
(Un + Vn)n   est la suite de terme général Un + Vn

(UnVn)n   est la suite de terme général UnVn

4.1 Somme de deux suites :

Théorème :

Supposons que Un → L1 ι /⌋ et Vn → L2 ι /⌋
(/⌋ = ⌋ N { -∞, + ∞ }

Alors la suite (Un + Vn) → L1 + L2 sauf si L1 = +∞ et L2 = -∞ ou L1=-∞ et L2 = + ∞

4.2 Produit de suites :

Théorème :

Soit (Un) converge vers 0 et (Vn) une suite bornée alors (UnVn) → 0

Preuve :

Il s'agit de montrer que   ε > 0 il existe p ι ⌋ tel que n ≥ p ⇒ |UnVn| < ε

La suite (Vn) est bornée (par hypothèse)
il existe M ≥ 0 tel que |Vn | ≤ M
Soit ε > 0
Posons ε1 = ε /(M+1)
La suite (Un) converge vers 0 ⇒
Il existe p ι ⌋ tel que n≥p ⇒ |Un-0|< ε1

Soit n ≥p on a | Un|< ε1
| UnVn| = |Un|.|Vn|< ε1.M = ε/(1+M).M < ε
| UnVn – 0 |< ε
Par conséquent, la suite (UnVn) converge vers 0.

Exemple :

Soit la suite Wn = cos n / n = Un .Vn
Un = 1/n et Vn = cos n
(Un) → 0 et (Vn) ≤ 1 (Bornée)

Lim (cos n)/n = 0
n→ ∞

Théorème :

Supposons que   Lim Un = L1 et   Lim Vn = L2
n→∞   n→∞

Si { -∞, 0 } ≅ {L1, L2} ≅ {0, + ∞ } alors

$\lim_{n \to \infty} (U_n V_n) = L_1 L_2$

4.3 Quotient de suites :

Théorème :

Supposons que (Un) converge vers L1 et (Vn) converge vers $L_2 \cong 0$
Alors $\lim_{n \to \infty} (U_n / V_n) = L_1 / L_2$

Corollaire :

Si (Un) → $L \cong 0$ alors 1/ Un → 1/L

Si L = 0 alors
Lim 1/Un = +∞ si à partir d'un certain rang Un > 0
ou
Lim 1/Un = -∞ si à partir d'un certain rang Un < 0

5. Théorème du passage à la limite

Soit (Un) et (Vn) deux suites telles que :

a. (Un) converge vers L1
   (Vn) converge vers L2
b. A partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$

Il existe n0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow U_n \leq V_n$

Alors si on a a. et b. $L_1 \leq L_2$

Preuve :

Démonstration par l'absurde

On va supposer que L1> L2
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(L_1 - L_2) > 0$
donc

- la suite Un converge vers L1 ⇒ Il existe p1 ι ⌋ tel que $n \geq p_1 \Rightarrow |U_n - L_1| < \varepsilon$ (1)
- la suite Vn converge vers L2 ⇒ Il existe p ι ⌋ tel que $n \geq p \Rightarrow |V_n - L_2| < \varepsilon$ (2)

D'après b. il existe p3 ι ⌋ tel que $n \geq p_3 \Rightarrow U_n \leq V_n$ (3)

Posons P = max(p1,p2,p3)
$n \geq p$

$L_1 - L_2 = L_1 - U_n + U_n - V_n + V_n - L_2$
D'après (3) on a $L_1 - L_2 < L_1 - U_n + V_n - V_n + V_n - L_2 = L_1 - U_n + V_n - L_2$
$L_1 - L_2 \leq |L_1 - U_n| + |V_n - L_2|$

D'après (1) et (2), on a
$L_1 - L_2 \leq |U_n - L_1| + |V_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon$

$\Rightarrow$ L1-L2 < 2ε = 2(½(L1-L2)) = L1 – L2

L1-L2 < L1-L2 (Absurde)

Par conséquent L1 ≤ L2

Quand on passe à la limite, l'inégalité stricte se transforme en une inégalité large

FAUX Un < Vn , n≥p ⇒ $\lim\limits_{n\to\infty}$ Un < $\lim\limits_{n\to\infty}$ Vn

<u>Exemple :</u>

Un = $1/n^2$ et Vn = 1/n

Un < Vn, n ≥2

$\lim\limits_{n\to\infty}$ Un = $\lim\limits_{n\to\infty}$ Vn = 0

<u>**Théorème d'encadrement :**</u>

Soient (Un), (Vn) et (Wn) trois suites de ⌋ et L ι ⌋ telles que

a. (Vn) et (Wn) convergent vers L
b. Vn ≤ Un ≤ W n à partir d'un certain rang

Alors $\lim\limits_{n\to\infty}$ Un = L

<u>**Preuve :**</u>

Soit ∏ > 0 il existe p ι ⌋ tel que n ≥ p ⇒ | Un – L | < ∏
La suite (Vn) converge vers L ⇒ il existe p1 ι ⌋ tel que si n ≥ p1 ⇒ |Vn – L | < ∏ (1)
La suite (Wn) converge vers L ⇒ il existe p2 ι ⌋ tel que si n ≥ p2 ⇒ |Wn – L | < ∏ (2)

D'après b. il existe p3 ι ⌋ tel que si n ≥ p3 ⇒ Vn ≤ Un ≤ Wn (3)
Prenons P = Max(p1, p2, p3)

Si $n \geq P$, on a :

d'après (1) $\quad | Vn - L| < \prod$ c.a.d $\quad -\prod < | Vn - L | < \prod \Rightarrow -\prod + L < Vn$ (1')

d'après (2) $\quad | Wn - L| < \prod$ c.a.d $\quad -\prod < | Wn - L | < \prod \Rightarrow -\prod + L < Wn$ (2')

d'après (3) $Vn \leq Un \leq Wn$

(1') et (2') $\Rightarrow -\prod + L < Vn \leq Un \leq Wn < L + \prod \Rightarrow L - \prod < Un < L + \prod \Rightarrow | Un - L | < \prod$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} Un = L$

<u>Exemples :</u>

1. $Un = {}_{k=1}{}^{n}\ n /(n^2 + K) = n /(n^2+1) + n /(n^2+2) + \ldots + n /(n^2+n)$

On remarque que $n /(n^2+n) \leq n /(n^2+k) \leq n /(n^2+1) \quad k \leq n$

$n[n /(n^2+n)] \leq {}_{k=1}{}^{n}\ n /(n^2+k) \leq n [n /(n^2+1)]$

$$\underbrace{n /(n+1)}_{Vn} \leq Un \leq \underbrace{n^2 /(n^2+1)}_{Wn}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} Vn = \lim\limits_{n \to \infty} Wn = 1$

donc d'après le théorème de l'encadrement

$\lim\limits_{n \to \infty} Un = 1$

2. On peut étudier la convergence des suites suivantes

$Un = (1! + 2 !+\ldots+n !) / (n+1) !$

$Vn = (1! + 2 !+\ldots+n !) / (n) !$

$Wn = (1! + 2 !+\ldots+n !) / (n-1) !$

On remarque que $Un = Vn / (n+1)$ et $Wn = nVn$

On va étudier la suite Vn

$Vn = (1! + 2 !+\ldots+(n-2) ! + (n-1) ! + n !) / (n) !$

$Vn = (1! + 2 !+\ldots+(n-2) !) / (n)! +(n-1)! / n ! + n! / n !$

$Vn = (1! + 2 !+\ldots+(n-2) !) / (n)! + 1/n + 1$

$1 \leq Vn \leq [(n-2)*(n-2) !]/n ! + 1/n + 1$

$(1 ! + 2 ! +\ldots+(n-2) ! \leq \underbrace{(n-2)}_{\text{nombre de termes}} * (n-2) !)$

$\Rightarrow 1 \leq Vn \leq (n-2) / n (n-1) +1/n + 1$

$Wn = (n-2) / n(n-1) + 1/n + 1 \qquad \lim\limits_{n \to \infty} W = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} Vn = 1$

$Un = Vn/ (n+1)$

$\lim Un = 0$

$n \to \infty$

$W_n = nV_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} W_n = +\infty$

6. Suites adjacentes :

Définition :

Les suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si :

a. L'une est croissante et l'autre est décroissante
b. $\lim\limits_{n\to\infty} (U_n - V_n) = 0$

Théorème : Deux suites adjacentes convergent vers la **même** limite

Preuve : On considère deux suites adjacentes (U_n) et (V_n) sans perte de généralités, on suppose que (U_n) est croissante et par conséquent (V_n) décroissante.

Montrons que (U_n) et (V_n) convergent

1er méthode :

Posons $W_n = U_n - V_n$
La suite (W_n) est convergente $\Rightarrow$ (W_n)est bornée c.a .d qu'il existe $A \geq 0$ tel que $| W_n | \leq A \Rightarrow$
$-A \leq W_n = U_n - V_n \leq A \Rightarrow U_n - V_n \leq A$ **ET** $-A \leq U_n - V_n$

$U_n \leq V_n + A \leq V_0 + A$ Car (V_n) est décroissante donc n $V_n \leq V_0$
n $U_n \leq V_0 + A$
donc la suite (U_n) est majorée et comme (U_n) est croissante alors c'est une suite convergente.
$U_n - V_n \leq A \Rightarrow V_n \geq U_n - A \geq U_0 - A$ car U_n est croissante.
$V_n \geq U_0 - A$
(V_n) est minorée par $U_0 - A$ et comme (V_n) est décroissante elle est donc une suite convergente

Si $U_n \to L_1$ et $V_n \to L_2$
D'après b. $\lim\limits_{n\to\infty} (U_n - V_n) = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} U_n - \lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0 \Rightarrow L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$

2ième méthode :

$W_n = U_n - V_n$
On va étudier cette suite pour voir si elle est croissante

$$W_{n+1} - W_n = U_{n+1} - V_{n+1} - (U_n - V_n) = \underbrace{(U_{n+1} - U_n)}_{\geq 0 \text{ car } U_n \text{ croissante}} - \underbrace{(V_{n+1} - V_n)}_{\leq 0 \text{ car } V_n \text{ décroissante}}$$

$\Rightarrow W_{n+1} - W_n \geq 0$ donc (W_n) est croissante

(Wn) est bornée et croissante ⇒ (Wn) converge vers sa borne supérieure

⇒ $W_n \leq 0$ n
$U_n - V_n \leq 0 \Rightarrow U_n \leq V_n$ n
$U_0 \leq U_n \leq V_n \leq V_0$ (Car Vn est décroissante et car Un est croissante)

$$\begin{cases} U_n \leq V_0 & \text{Un est majorée} \\ U_0 \leq V_n & \text{Vn est minorée} \end{cases}$$

(Un) est majorée et croissante ⇒ convergente
(Vn) est minorée et décroissante ⇒ convergente

Exercice : Monter que $U_n \leq V_m$ n, m ι ⌋

Exemple :

$U_n = 1 + ½ ! +….+1/n !$
$V_n = U_n + 1/n !$ nι ⌋*

$U_{n+1} - U_n = (1+1/2! +…+1/n ! + 1/(n+1) !) - (1+1/2! +…+1/n !)$
$= 1/(n+1) ! > 0$ donc Un est croissante

$V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} + 1/(n+1)!) - (U_n + 1/n !)$
$= (U_{n+1} - U_n) + 1/(n+1)! - 1/n !$
$= 1/(n+1)! + 1/(n+1)! - 1/n ! = 2/(n+1)! - 1/n ! = (1-n) / (n+1)! \leq 0$ Vn est décroissante

$U_n - V_n = U_n - (U_n + 1/n !) = -1/n !$

$$\lim_{n \to \infty} (U_n - V_n) = 0$$

(Un) et (Vn) sont deux suites adjacentes ⇒ (Un) et (Vn) convergent vers la même limite.

7. Résultats divers :

Propriété de Cauchy :

Soient (Un) une suite convergente et (Vn) et (Wn) deux suites extraites de (Un) .
Alors $\lim_{n\to\infty}(V_n - W_n) = 0$

Exemple :

$Un = 1 + ½ +…+1/n$
$Vn = U2n$
$Wn = Un$
$Vn – Wn = 1 + ½ + 1/2n – (1+ ½ + ….+1/n)$
$= 1/(n+1) + 1/(n+2) + …. + 1/2n \quad \geq n(1/2n)= 1 /2$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (Vn – Wn) \cong 0$
$\Rightarrow$ La suite (Un) est divergente

Lemme d'Alembert :

Soit (Un) une suite telle que $Un > 0$
Si $\lim_{n\to\infty} (Un+1) /Un < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} Un = 0$

Exemple :

$Un = n^a/b^n$
$Vn = b^n / n !$
$Wn = n! / n^n$ et $b > 1$

On va vérifié $Un \geq 0 \quad n$
$Un+1 / Un = [(n+1)^a / b^{n+1}] * b^n/n^a = 1/b((n+1) /n)^a$
$Un+1 / Un = 1/b(1 + 1/n)^a$
$\lim_{n\to\infty} Un+1 / Un = 1/b < 1$ car $b>1$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Un = 0$

$Vn = b^n/n ! \qquad Vn>0$
$Vn+1/Vn = [b^{n+1} / (n+1)!]* n!/b^n = b/(n+1)$
$\lim_{n\to\infty} Vn+1 / Vn = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Vn = 0$

$Wn = n! / n^n$
$Wn+1 / Wn = [(n+1)! / (n+1)^{n+1}] * n^n/ n! = (n+1) / (n+1)^{n+1} * n^n$
$= n^n / (n+1)^n = (n/n+1)^n$
On va étudier la suite $Wn / Wn+1 = ((n+1) / n)^n = (1+1/n)^n$
$Ln(Wn/ Wn+1) = Ln (1 +1/n)^n = nLn(1+1/n)$
$\lim_{n\to\infty} (Ln(Wn/ Wn+1)) = \lim_{n\to\infty} n Ln(1+ 1/n)$

On prend $n = 1/x$ comme $n \to \infty$ alors $x \to 0$
$= \lim_{x\to 0} (Ln(1+x)) / x = \lim_{x\to 0} [Ln(1+x) – ln(1+0)] / x-0$

si on pose $f(x) = Ln(1+x)$
$\lim_{x\to 0} [Ln(1+x) – Ln(1+0)]/(x-0)= \lim_{x\to 0} f(x) – f(0) / x-0$

$= f'(0)$ et $f'(x) = 1/(1+x) \Rightarrow f'(0) = 1$

donc on a montré que $\lim_{n \to \infty} (\ln(W_n / W_{n+1})) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} W_n / W_{n+1} = e$

$\lim_{n \to \infty} W_{n+1} / W_n = 1/e < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} W_n = 0$

8. Etude de quelques suites particulières :

8.1 Suites arithmétiques :

Suite définit par $U_{n+1} = U_n + r$, r est la raison de cette suite

$U_{n+1} = U_0 + nr$

Si $r = 0$: la suite est convergente

Si $r \cong 0$: Un est divergente

8.2 Suites géométriques :

∇ : raison

$$\begin{cases} U_{n+1} = \nabla U_n \\ U_{n+1} = \nabla^n U_0 \end{cases}$$

Si $\nabla = 1$: La suite est convergente

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } |\nabla| < 1 : \lim_{n \to \infty} U_n = 0 \\ \text{Si } \nabla \geq 1,\ \nabla \cong 1 \text{ et } U_0 \cong 0 \end{array}\right\} \text{Alors (Un) est divergente}$$

8.3 Suite définie par une relation de récurrence :

$U_n = f(U_{n-1})$

On étudie la fonction sur un intervalle I tel que f(I) _ I et U0 ι I

a. f est croissante c.a.d $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1})$

$U_{n+1} - U_n$ a le même le même signe que $U_n - U_{n-1}$

car si $U_n \geq U_{n-1}$ f est croissante $f(U_n) \geq f(U_{n-1}) \geq 0$

$U_{n+1} - U_n$ a le même signe que $U_1 - U_0$

Si $U_1 - U_0 \geq 0$ alors (Un) est croissante

Si $U_1 - U_0 \leq 0$ alors (Un) est décroissante

Dans les deux cas, on essaye d'appliquer le théorème des suites monotones c.a.d si (Un) est croissante on essaye de la majorée et si (un) est décroissante on essaye de la minorée.

b. f est décroissante $\Rightarrow$ fof est croissante

Soit $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ car f est décroissante

$\Rightarrow f(\ f(x)\ ) \leq f(\ f(y)\ ) \Rightarrow fof(x) \leq fof(\ y\ )$

Si (Un) est convergente $\Longleftrightarrow$ (U2n+1) et(U2n) convergent vers la même limite

Vn+1 = g(Vn). En effet g(Vn) = fof(Vn) = fof(U2n) = f(f(U2n)) = f(U2n+1) = U2(n+1)= Vn+1

Vn+1 = g(Vn) , g est croissante

D'après le cas a) Vn est une suite monotone
Wn+1 = g(Wn) = fof(U2n+1) = f(U2n+2) = U2n+3 = U2(n+1)+1 = Wn+1 donc (Wn) est monotone.

c. f est continue sur I
Si la suite (Un) converge vers L, alors f(L) = L
Si f est continue et f(x) = x n'a pas de solution alors (Un) est divergente.

<u>Exemple :</u>

U1 = 2, Un+1 = ½ (Un + 2/Un)
On considère l'application f(x) = ½ (x+2/x)
On a Un+1 = f(Un)
Etudions l'application f(x) = ½(x+2/x)
On prend f '(x) = ½ ($1-2x^2$) = ½ ($(x^2-2)/x^2$)
La dérivée s'annule pour x = - 2 ou x = 2 et n'est pas définie en 0

x	$-\infty$		- 2		0		2		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	//	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	- 2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

On cherche I tel que f(I) _ I et U1 ι I
On prend I = [2, 2]
U1 ι I et f(2) = 2 et f(2) = 3/2
La fonction est croissante
par conséquent f(I) _ [2, 3/2] _[2, 2]
f est croissante sur I $\Rightarrow$ (Un) est monotone. Pour savoir si (Un) est croissante ou décroissante, on étudie le signe de Un+1 – Un

U2 – U1
U1 = 2, U2 = 3/2
U2 – U1 < 0
par conséquent la suite est décroissante et on remarque que Un+1 = ½ (Un + 2/Un) est toujours positive (Un $\geq$ 0, n)
(Un) est décroissante et minorée $\Rightarrow$ (Un) converge vers L
D'autre part, la fonction f est continue sur I = [2, 2] $\Rightarrow$ f(L) = L
On a donc L= ½ (L+2/L) $\Rightarrow$ 2L = L + 2/L $\Rightarrow$ 2/L = L $\Rightarrow$ L^2=2 $\Rightarrow$ L = 2 ou L = - 2
(Un) étant toujours $\geq$ 0 donc L = - 2 n'est pas possible, il reste seulement L = 2

$\lim\limits_{n \to \infty} Un = 2$

Chapitre IV) Les séries :

1. Séries à termes réels :

1.1 Définition : Soit (Un) une suite dans ⌡, on appelle la « série de terme général Un » (On écrit par abus d'écriture « la série Un »)

L'expression U0+U1+U2+… elle est notée $_{p=0}^{\infty}$ Up

On pose Sn = $_{p=0}^{n}$ Up

(Sn) est appelé la suite des sommes partielles de la série Un

- On dit que la série Un converge si la suite (Sn) converge et dans ce cas, la limite S de la suite (Sn) est appelée la somme de la série Un.

S = $_{p=0}^{\infty}$ Up

- Si la suite (Sn) est divergente, alors la série Un est divergente (pas de limite : Γ∞)

Remarque : La nature d'une série (convergence ou divergence) ne dépend pas des premiers termes de cette série c.a.d $_{n\geq 0}$ Un et $_{n\geq n0}$Un convergent ou divergent en même temps.

Exemples :

(Série de termes général Un = Z^n)

1. $_{n\geq 0}$ Zn, Z ι ⌡ (Série géométrique) donc on étudie la suites des sommes partielles

$Sn = Z^0{}_+Z^1+\ldots+Z^n = 1 + Z^1+\ldots+Z^n = (1- Z^{n+1}) / 1-Z$

alors la convergence de cette suite dépend de Z.

Si $|Z| < 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} Z^{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} Sn = 1/1-Z$

et si Z = 1 ⇒ Sn = 1+1+…+1 = n+1, cette suite est divergente

En conclusion, Si $|Z| < 1$, alors $_{n=0}^{\infty} Z^n = 1/1-Z$

et si $|Z| \geq 1$, alors Z^n est divergente

2. La série de terme général. Un = 1/ n, n ≥1

L'étude de la convergence de cette série revient à étudier la convergence de Sn

Sn = U1+U2+…+Un= 1 + 1/ 2+…+ n

On a n termes et chaque terme ≥ 1/ n

1 ≥ 1/ n

1/ 2 ≥ 1/ n

…

1/ (n-1) ≥ 1/ n

donc Sn ≥ n/ n = n et par conséquent Sn est divergente donc Un est divergente.

1.2 Une condition nécessaire de convergence :

Théorème : Si la série de terme général Un est convergente alors $\lim_{n \to \infty} Un = 0$

Preuve : La série Un converge ⇒ la suite (Sn) converge vers L.
La suite (Sn) converge vers L ⇒ toute sous-suite de (Sn) converge vers L.
On considère les deux sous-suites (Sn) et (Sn-1)

Vn = Sn-1, n≥1
donc $\lim_{n \to \infty} Sn = \lim_{n \to \infty} Sn\text{-}1 = L$

Sn – Sn-1 = (U0+U1+…+Un) - (U0+U1+…+Un-2+Un-1) = Un et par conséquent
$\lim_{n \to \infty} Un = \lim_{n \to \infty} (Sn - Sn\text{-}1) = \lim_{n \to \infty} Sn - \lim_{n \to \infty} Sn\text{-}1 = L - L = 0$

* La réciproque est fausse

Exemple :

La série de terme général Un = 1/ n
Un tend vers 0 et pourtant Un est divergente

* Pour la série de terme général Un = $_{n\geq 0}$ $(-1)^n$ Un = $(-1)^n$: diverge
* $_{n\geq 0}$ sin(n) Un = sin(n) : diverge
* $_{n\geq 0}$ n/(n+1) Un = n/(n+1) et $\lim_{n \to +\infty} Un = 1 \cong 0$: diverge

1.3 Suite de Cauchy :

Rappel : (Un) est une suite de Cauchy Si
∏ >0, il existe un p ι ⌋ tel que n ≥ p et m ≥ p ⇒ |Un – Um| < ∏
(Un) une suite dans ⌋
(Un) converge ⇐⇒(Un) est de Cauchy

Corollaire : La série de terme général Un converge ⇐⇒ ∏ > 0 , il existe p ι ⌋, n ≥ p et m ≥ n alors |Un+1 + Un+2 + …+ Um | < ∏ (1)

Exercice : Montrer ce corollaire. Appliquer le résultat des suites de Cauchy sur la suite des sommes partielles

Exemple : La série de terme général Un = $a^n/5^n$ où (an) est une suite bornée.
On veut étudier la convergence de Un.

Soit ∏ > 0, et on essaye de trouver p qui vérifie (1) Voir au dessus

On prend n et m, on suppose que m $\geq$n et on va étudier $|Un+1 + Un+2 +\ldots+Um|$ cette somme est inférieure à $|Un+1| + |Un+2| + \ldots + |Um| = |a^{n+1}| /5^{n+1} + |a^{n+2}| /5^{n+2}+\ldots+|a^{m}| /5^{m}$ donc la suite (an) est bornée $\Rightarrow$ il existe $A \geq 0$ tel que $|an| < A$, n et donc on obtient

$|Un+1 + Un+2+\ldots+Um| < A/5^{n+1} + A/5^{n+2} +\ldots A / 5^{m} \Rightarrow$

$|Un+1 + Un+2+\ldots+Um| < A/5^{n+1} [1 + (1/5)^{2} + (1/5)^{3} + \ldots + (1/5)^{m-n-1}]$

On obtient que $|Un+1 + Un+2+\ldots+Um| < A/5^{n+1} [1 + (1/5)^{2} + (1/5)^{3} +\ldots=$
$A/5^{n+1} [[1- (1/5)^{m-n}]/ [1 - 1/5]] = A/5^{n+1} (1/(1-1/5)) - A/5^{n+1} ((1/5)^{m-n}/(1-1/5))$
$< A/5^{n+1} * 5/4 = A / 4*5^{n}$

On va chercher p tel que $n \geq p \Rightarrow A / 4*5^{n} < \prod$ c.a.d $A/5^{n} < 4\prod \Rightarrow A/4\prod < 5^{n}$
$\Rightarrow \ln(A/4\prod) < n \ln 5 \Rightarrow n > \ln(A/4\prod) / \ln 5$ Tout entier vérifie cette inégalité

Posons $p = \lceil \ln(A/4\prod)/\ln 5 \rceil + 1$

$n \geq p$ et $m \geq n \Rightarrow | Un+1 + Un+2 + \ldots + Um | < A/(4*5^{n}) < \prod$
La série Un est convergente

2. Série à termes positifs :

Définition : La série Un est dite série à termes positifs si $Un \geq 0$, n

Théorème : La série Un des termes positifs est convergente ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Preuve : On regarde la suite des sommes partielles
$Sn = U0+U1+\ldots+Un$
On remarque que cette suite est croissante car $Sn+1- Sn = (U0+U1+\ldots+Un+1)-(U0+U1+\ldots+Un) = Un+1 > 0$
On a vu qu'une suite croissante converge ssi elle est majorée mais il existe des séries divergentes dont les suites de sommes partielles sont majorées.

Exemple : $_{n\geq0}$ $(-1)^{n}$ série divergente car Un ne tend pas vers 0
$Un = (-1)^{n}$
$Sn = (-1)^{0} + (-1)^{1} +\ldots+(-1)^{n}$ cette suite vaut 1 ou 0 donc elle est bornée n ($|Sn| \leq 1$ n)

2.1 Critères de comparaison :

Théorème : Soient Un et Vn deux séries à termes positifs. Supposons qu'à partir d'un certain rang (n0) on ait $Un \leq Vn$, $n \geq n0$. Alors la série Vn converge $\Rightarrow$ Un converge
Un diverge $\Rightarrow$ Vn diverge

Preuve :

On peut se ramener au cas n0 = 0. On considère qu'une série ne change pas de nature si on lui enlève des termes.

On pose $Sn = U0+U1+\ldots.+Un \leq Tn = V0+V1+\ldots.+Vn$
donc $Sn \leq Tn$ n on sait que (Sn) est une suite croissante donc si (Vn) est convergente $\Rightarrow$ Tn est majorée $\Rightarrow$ (Sn) est majorée donc (Sn) est croissante et majorée alors (Sn) est convergente.

SI Un est divergente $\Rightarrow$ (Sn) n'est pas majorée $\Rightarrow$ (Tn) n'est pas majorée (Car $Tn \geq Sn$) $\Rightarrow$ (Tn) est divergente $\Longleftrightarrow$ Vn est divergente

<u>Exemple :</u>

$Un = \dfrac{2 + \sin(n)}{3^{n+1}}$, $n \geq 0$

On considère $Un \leq \dfrac{2 +1}{3^{n+1}} = 1/ 3^n = (1/3)^n$

En prenant $Vn = (1/3)^n$
Puisque Vn est convergente donc on obtient la convergence de Un

<u>Proposition :</u>

On considère les séries Un et Vn à termes positifs :
Si la suite (Un / Vn) est définie et de limite L, alors :
- Si L ≅0 : Les deux séries sont de même nature (Elles convergent ou elles divergent)
- Si L = 0 : Vn converge => Un converge (Un diverge => Vn diverge)

<u>Preuve :</u>

1. On suppose que L ≅ 0. On va montrer que si l'une converge l'autre aussi
   Puisque la suite (Un / Vn) converge vers L.
   ∏ , Il existe p tel que n≥p => | (Un / Vn) - L | < ∏
   On choisit ∏ tel que L - ∏ > 0 car L ≅ 0
   Par conséquent Un / Vn -L < ∏ => L -∏ < Un / Vn < L + ∏
   et donc (L - ∏) Vn < Un < (L + ∏) Vn
   - Si Vn converge => (L +∏) Vn converge c.a.d Un < (L + ∏) Vn

   (**<u>Rappel :</u>** Un ≤ Wn à partir d'un certain rang si Wn converge alors => Un converge))

   donc Un converge, d'après le résultat

   - Si Vn diverge => (L - ∏) Vn diverge

   (**<u>Rappels :</u>** Wn ≤ Un à partir d'un certain rang si Wn diverge => Un diverge)

   donc Un diverge, d'après le résultat

   - Si Un diverge, comme on a Un < (L + ∏) Vn
   donc (L + ∏) Vn diverge => Vn diverge

   - Si Un converge, comme on a (L - ∏) Vn < Un
   donc (L + ∏) Vn converge => Vn converge

2. Si L = 0
   Un /Vn → 0.
   On choisit ∏ = 1, donc il existe p ι ⌋ tel que n ≥ p => | (Un / Vn) – 0 | < ∏ = 1=>
   Un /Vn < 1 => Un < Vn
   Si Vn diverge => Un diverge

Si Vn converge => Un converge

Exemple :

$$Un = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n} \qquad , Vn = (3 /5)^{\,n} , n \geq 1$$

$$Un / Vn = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n} * \frac{5^{\,n}}{3^n} = \frac{5^n . 3^n ((2/5)^n + 1)}{3^n . 5^n ((n^2 /5)^n + (\ln n / 5)^{\,n} + 1}$$

$$\Rightarrow Un / Vn = \frac{(2/5)^n + 1}{(n^2 /5)^n + (\ln n / 5)^{\,n} + 1}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} (2 / 5)^{\,n} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} n^2 / 5^n = 0$

A partir d'un certain rang $5^n \geq n^3$ $n \geq n0$ par conséquent
$0 < 1 / 5^n \leq 1 / n^3$
$0 < n^2 / 5^n \leq n^2/ n^3 – 1/ n$
$0 < n^2 / 5^n \leq 1 / n$

$\lim\limits_{n \to \infty} \ln (n) / 5^n = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} Un / Vn = 1 \cong 0$

=> Un et V sont de même nature.
Vn série géométrique de raison $3 / 5 < 1$ => Vn converge => Un converge

Théorème : (Série de Riemann)

La série de terme général $Un = 1 / n^{\nabla}$ converge ssi $\nabla > 1$
$\nabla > 1$ $1/n^{\nabla}$ converge et $\nabla \leq 1$ $1/n^{\nabla}$ diverge

Corollaire : (Critère n^{∇} Un) :

Soit Un une série à termes positifs. Supposons que $n^{\nabla}\, Un \to L$
- Si $L \cong 0$, alors Un converge si $\nabla > 1$ et diverge si $\nabla \leq 1$
- Si $L = 0$, alors la série converge si $\nabla > 1$

Preuve :

$n^{\nabla}\, Un = Un / (1/n^{\nabla}) = Un / Vn$, $Vn = 1/n^{\nabla}$ (Série de Rieman)
- Si $\lim\limits_{n \to \infty} Un / Vn = L \cong 0$ alors les deux séries Un et Vn sont de même nature or la série de Riemann converge ssi $\nabla > 1$ => Vn converge ssi $\nabla > 1$

- Si $\lim\limits_{n \to \infty} Un / Vn = 0$, Si Vn converge => Un converge or Vn converge si $\nabla > 1$

  => Un converge si $\nabla > 1$

<u>Théorème (Critère de Cauchy) :</u>

Soit Un une série à termes positifs. Si la suite $Un^{1/n}$ converge vers L alors :
- Si L < 1, la série Un converge
- Si L > 1, la série Un diverge
- Si L = 1, on ne peut pas conclure

<u>Exemple 1 :</u>

$Un = 1/ n, n \geq 1$
Un est divergente
$Un^{1/n} = (1 / n^{1/n})$
$\lim\limits_{n \to \infty} Un^{1/n} = \lim\limits_{n \to \infty} (1 / n^{1/n}) = 1$

<u>Exemple 2 :</u>

$Un = 1/ n^2$
Un : série de Riemann avec $\nabla = 2 > 1$ donc série convergente
$\lim\limits_{n \to \infty} Un^{1/n} = \lim\limits_{n \to \infty} (1 / n^{2/n}) = 1$

<u>Exemple 3 :</u>

$Un = 1 / n^n$
$Un^{1/n} = 1 / (n^n)^{1/n} = 1 / n$ =>
$\lim\limits_{n \to \infty} Un^{1/n} = 0 < 1$
=> Un converge

<u>Remarque :</u> Il ne suffit pas que $Un^{1/n} < 1$ pour en déduire la convergence de Un

<u>Exemple :</u> $Un^{1/n} = 1 / n^{1/n} < 1$ $n \geq 2$ mais $\lim\limits_{n \to \infty} Un^{1/n} = 1$

<u>Théorème :</u> <u>Critère de d'Alembert)</u>

On considère Un une série à termes positifs. Supposons que la suite (Un+1 / Un) soit définie (c.a.d Un > 0 à partir d'un certain rang) et de limite L

Alors :
- Si L < 1, la série Un converge
- Si L > 1, la série Un diverge
- Si L =1, On ne peut pas conclure sur la convergence ou la divergence de Un

<u>Exemple :</u>

1. $Un = 1 / n, n \geq 1$
   $Un+1 / Un = n / n +1 \rightarrow 1$ et on sait que Un diverge
2. $Un = 1 / n^2$ Série de Riemann avec $\nabla > 1$ (convergente)
   $Un+1 / Un = n^2 / (n + 1)^2 \rightarrow 1$
   La série Un = $1 / n^2$ converge

3. $Un = 1 / n\,!$ ($n \geq 0$)
   $Un+1 / Un = n! / (n+1)! = 1 / n+1 \rightarrow 0 < 1$ et par conséquent la série Un converge

Il faut toujours vérifier que l'on a seulement des termes positifs

<u>Remarque :</u>

$Un+1 / Un < 1$ n'implique pas la convergence de Un car lorsque l'on passe à la limite on peut obtenir que la limite = 1.

<u>Exemple :</u>

$Un = 1 / n, n \geq 1$
$Un+1 / Un = n / n+1 < 1$ n
et pourtant la série 1/ n est divergente

<u>Exemple :</u>

$Un = 2^{(-1)^n - n}$

On prend $Un+1 / Un = Vn$

(Vn) n'a pas de limite car si on prend

$$V2n = \frac{U2n+1}{U2n} = \frac{2^{(-1)^{2n+1} - (2n+1)}}{2^{(-1)^{2n} - 2n}}$$

$$V2n = \frac{2^{-1 - (2n+1)}}{2^{1-2n}} = \frac{2^{-2n-2}}{2^{-2n+1}} = \frac{2^{-2}}{2}$$

$= 1 / 2^3 = 1 / 8$

$$\text{et } V2n+1 = \frac{U2n+1+1}{U2n+1} = \frac{2^{(-1)^{2n+1+1} - (2n+1+1)}}{2^{(-1)^{2n+1} - (2n+1)}}$$

$$= \frac{2^{(-1)^{2n+2} - (2n+2)}}{2^{(-1)^{2n+1} - (2n+1)}} = \frac{2^{-1 - (2n+2)}}{2^{-1 - (2n+1)}}$$

$$= \frac{2^{-1-2}}{2^{-1-1}} = 2 / 2^{-2} = 2$$

donc la suite Vn n'a pas de limite et donc on ne peut pas utiliser le critère Un+1 / Un

Par contre, $Un^{1/n} = (2^{(-1)^n - n})^{1/n} = (2^{(-1)^n} / 2^n)^{1/n} = (2^{(-1)^n . 1/n} / 2)$

$\text{Lim } Un^{1/n} = 2^{0} / 2 = 1 / 2 < 1$
$n \to \infty$

Par conséquent, Un converge

3. Convergence Absolue :

On dit que la série Un converge absolument si la série de terme général |Un| converge
(c.a.d Un converge absolument <==> |Un| converge)

Théorème :

Si la série Un converge absolument, alors elle est convergente.
|Un| converge, lim | Un+1| / |Un| = L < 1
$n \to \infty$

4. Série alternée :

Une série est dite alternée si son terme général $Un = (-1)^{n} Vn$, $Vn > 0$
OU (Si Un * Un+1 < 0, n)

Exemple :

$(-1)^{n} / n$, $n \geq 1$, $Un = (-1)^{n} Vn$
$Vn = 1 / n > 0$

Théorème : Soit Un une série alternée donc $Un = (-1)^{n} Vn$, $Vn > 0$. Si la suite Vn est décroissante et de limite nulle, alors la série Un converge.

Preuve :

$Sn = {}_{p=0}{}^{n} Up$ si Sn est convergente alors Un converge
Sn est convergente <==> (S2n) et (S2n+1) converge vers la même limite

$Sn = {}_{p=0}{}^{n} Up - {}_{p=0}{}^{n} (-1)^{p} Vp$

On va étudier la convergence de (S2n) et (S2n+1)
Xn Wn

$Xn+1 – Xn = S2(n+1) – S2n = S2n+2 – S2n = ({}_{p=0}{}^{2n+2} (-1)^{p} Vp - {}_{p=0}{}^{2n} (-1)^{p} Vp)$