Variable aléatoire de Bernoulli

C'est une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs 0 ou 1, avec
$P(X = 0) = 1 - p$
$P(X = 1) = p$
Avec p ι [0 , 1]

p est le paramètre de la loi, il correspond à une expérimentation à seulement deux résultats.
- Echec X = 0
- Succès X = 1

⇒ P est la probabilité de succès
Exemple : Tirer à p/f

Variable aléatoire géométrique

Expérimentation : On répète une expé de Bernoulli (E / S) et on arrête après le premier succès.
On note X le nombre d'essai pour arrivé au premier succès (y compris le succès)

$\chi = ⌡^*$

$P (X = k) = (1 - p)^{k-1} p$

(il y a k –1 échecs et 1 succès)

On vérifie les conditions

$(1 - p)^{k - 1} p \geq 0$

∞
p (1 – p) $^{k - 1}$
k = 1

∞
= p (1 – p) $^{k - 1}$
k = 1

∞
= p (1 – p) i
i = 0

On sait que $s^i = 1 / (1 - s)$ pour s ι [0 , 1]

En effet

$S = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots$
$s*S = s + s^2 + s^3 + \ldots$

$S - sS = 1$

$\Rightarrow S (1 - s) = 1$
$\Rightarrow S = 1 / (1 - s)$

$$p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p (1 / (1-(1 - p)) p / p = 1$$

Variable aléatoire binomiale :

$P (X = k) = P^k (1 - p)^{n-k} C_n^k$

Pour x ι { 0,1,2,…,n} = χ

Avec deux paramètres : n, p ($n \geq 1$ et $0 \leq p \leq 1$)

On note $X \sim B(n , p)$
(X est distribué selon une loi binomiale de paramètre n, p)

- $p^k (1 - p)^{n-k} C_n^k \geq 0$
- $\sum_{k=0}^{\infty} p^k (1 - p)^{n-k} C_n^k$

  $= (p + (1 - p))^n$ par la formule du binôme
  $= 1^n = 1$

  Exemple : On répète n fois une expé de Bernoulli (E / S) avec un paramètre p et X est le nombre de succès.

  On tire 8 fois a p/f est X : Nombre de face

  Si on a k succès sur n essais, combien de cas favorables à k succès et (n – k) échec ?
  = nombre de combinaison C_n^k

  Chacune de ces configurations a une probabilité ($P^k (1 - p)^{n-k}$ *)*

  Exemple : On a un système électronique à n composantes

  Chacune a une probabilité p de fonctionner indépendamment des autres.
  On note X le nombre de composante qui fonctionne.
  Pour que le système fonctionne, il faut que la moitié au moins de composantes fonctionnent.

- *Système à 3 composantes*

  P (Système fonctionne) = $P (X \geq 2) = P (X = 2) + P (X = 3)$

  $= C_3^2 p^2 (1 - p) + C_3^3 p^3$
  $= 3 p^2 (1 - p) + p^3 = p^2(3- 2 p)$

- *Système à 5 composantes*

  P (Système fonctionne) = P (X ≥ 3) = P (X = 3) + P (X = 4) + P (X = 5)

  $= C_5^3 p^3 (1 - p^2) + C_5^4 p^4 (1 - p) + C_5^5 p^5$
  $= 10 p^3 (1 - p^2) + 5 p^4 (1 - p) + p^5$

Pour décider quel système choisir, il faut comparer les deux systèmes
- *Si $p > 1 / 2 \Rightarrow$ 5 composantes c'est cool*
- *Si $p < 1 / 2 \Rightarrow$ 3 composantes c'est cool*

<u>Variable aléatoire de Poisson</u>

$P (X = k) = (e^{-\lambda} . \lambda^k) / k!$, $k = 0,1,2,3,...,n$

$\chi = \rfloor$

λ est un paramètre $\lambda > 0$

$(e^{-\lambda} . \lambda^k) / k! \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda} . \lambda^k) / k!$$

$$e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k / k!}_{e^{\lambda}}$$

$$e^{-\lambda} \; e^{\lambda} = 1$$

La v.a de Poisson est le cas limite de v.a binomiale lorsque $n \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow np$ reste constant

En effet,

$P (X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ pour une v.a binomiale

$= \quad n ! / (n-k) ! \; k !) \; . \; (p / (p - 1)^k . (1 - p)^n$

5. Couple de variable aléatoires

Quand une expérience se décrit par deux variables aléatoires.

Exemples :
- Poids / Taille d'un individu tiré au hasard dans une population
- Temps d'arrivé / temps d'exécution d'une requête sur un serveur
- Revenu / patrimoine d'un ménage

5.1 Couple de v.a. discrètes

Il se décrit à l'aide du système de probabilité P(X = x , Y = y)
Il se représente à l'aide d'un tableau à double entrée

Y / X	x1	x2		xi		xp
y1						
y2						
yi				P(X=xi, Y=yi)		
ym						

……

P(Y=yi) =

P(Y=yi et X = xj)
xj

………

P(X=xi) =

P(X=xi et Y = yj)
yj

1

Il faut que P(X = xi , Y = yj) = 1
xi yj

Si on s'intéresse à la loi de X uniquement

Par exemple :

P(X = xi) = P(X = xi et Y = yj)
yj

(Par la formule des probabilités totales)

$$P(Y = y_j) = \quad_{x_i} P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$$

En le faisant sur tous les y on obtient le système de probabilités de Y

La somme de la colonne ou de la ligne (en bleu sur le schéma page précédente) vaut 1.

$P(X = x_i)$ et $P(Y = y_j)$ s'appèlent les lois marginales (en marge)

Alors $P(X = x_i)$ (pour $i = 1,2,\ldots,p$) est la loi marginale de X

Exemple :
Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3.
On tire deux boules sans remise successivement.
X : Numéro de la première boule tirée
Y : Numéro de la seconde boule tirée

Y / X	1	2	3	
1	0	1 / 6	1 / 6	1/3
2	1 / 6	0	1 / 6	1/3
3	1 / 6	1 / 6	0	1/3
	1/3	1/3	1/3	

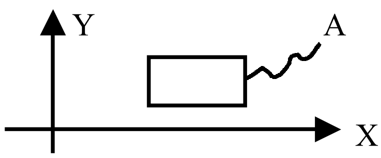
$P(X = 1 , Y = 1) = 0$
$P(X = 1 , Y 2) = 1/ 6$ (Cas équiprobable)

La loi marginale de X = loi du premier numéro tiré sans référence au second numéro.

5.2 Couple de v.a continues

Un couple d'une v.a (X, Y) est un couple de v.a continue si il est décrit par une fonction à deux variables f(x, y) qui sera la densité du couple.

Dans ce cas on a :



$P(X , Y) \iota A = \quad f(x , y)\, dx\, dy$

Lois marginales :

La loi de X :

$$f_X (x) = \quad_{-\infty}^{+\infty} f(x , y)\, dy$$

La loi de Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

Lexique du discret ←→ continu

… x $\longleftrightarrow$ … dx

p(…) $\longleftrightarrow$ f(…)

5.3 Indépendance

Deux v.a X et Y sont indépendantes :

Cas discret :

Ssi $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad (x, y)\ \iota\ (X, Y)$

↑

Ensemble des valeurs possibles

[Conséquence de P(A O B) P(A) * P(B) par la définition de l'indépendance entre deux évènements]

Cas continu :

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Exemple :

Soit la densité

$f(x, y) = (1+x+y)/2$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$

$f(x, y) = 0$ pour les autres valeurs de x et y

$$f_X(x) = \int_0^1 (1 + x + y)/2\, dy$$

$$= \left[\left(\frac{1 + x}{2}\right) \cdot y\right]_0^1 + \left[y^2/4\right]_0^1$$

$$= (1+x)/2 + 1/4 = 3/4 + x/2$$

$$f_Y(y) = 3/4 + x/2$$

Et $f(x, y) \neq f_Y(y) \cdot f_X(x)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes

Exemple :

$f(x, y) = 4xy$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$
$f(x, y) = 0$ pour les autres valeurs de x et y

Loi marginale

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy \, dy = \left[2xy^2 \right]_0^1 = 2x$$

$f_Y(y) = 2y$

Et $f(x, y) = f_Y(y) \,.\, f_X(x)$ donc X et Y sont indépendantes

5.4 Lois conditionnelles

Quand on s'intéresse aux lois marginales de X alors la v.a Y n'est pas précisée (Elle peut prendre toutes les valeurs possibles)

Dans la loi conditionnelle, on fixe une valeur de Y, notée y, et on regarde pour ce cas la loi de X.

En discret :

$P(X = x \mid Y = y) = P(X = x \text{ et } Y = y) / P(Y = y)$
par la définition des probabilités conditionnelles

Si X et Y sont indépendantes on a $P(X = x \mid Y = y) = P(X = x \text{ et } Y = y) / P(Y = y)$

$= [P(X = x) \,.\, P(Y = y)] / P(Y = y) = P(X = x)$

Cas continu :

$f_{X \mid Y}(x \mid Y = y)$ /* Densité de x sachant Y = y */

$= f(x, y) / f_Y(y)$

C'est la définition de la densité conditionnelle de X sachant que Y = y

Note : Il faut que $f_Y(y) > 0$

Par convention : Si $f_Y(y) = 0$ alors $f_{X \mid Y}(x \mid Y = y) = 0$

Si X et Y sont indépendantes alors

$f_{X \mid Y}(x \mid Y = y) = f(x, y) / f_Y(y)$

Or $[f_X(x) \,.\, f_Y(y)] / f_Y(y) = f_X(x)$

Même interprétation que pour le cas discret.

6 Somme de Variables aléatoires :

6.1 Cas discret :

X et Y deux v.a indépendantes

On définit $Z = X + Y$

On recherche la loi de probabilité de Z connaissant celle de X et de Y

$$P (Z = z) = P (X + Y = z)$$

$$= \underset{x}{\ } P (X + Y = z \mid X = x)$$

(Formule des probabilités totales et composées pour tout x)

Or $P(X + Y = z \mid X = x) = P(x + Y = z \mid X = x) = P(Y = z - x \mid X = x)$

Or Y indépendant de X on obtient $P(Y = z - x)$

Ce qui donne : $\boxed{P (Z = z) = \underset{x}{\ } P (Y = z - x) P (X = x)}$

Exemple 1 :

X v.a Binomiale (n, p)
Y v.a Bernouilli(p)
Y prend pour valeur 0 ou 1

X et Y indépendante

$Z = X + Y$

$$P (Z = z) = \underset{y}{\ } P (Y = y) . P (X = z - y)$$

$$= P(Y = 0) . P(X = z) + P (Y = 1) P (X = z - 1)$$

$$= (1 - p) C_n^z p^z (1 - p)^{n - z} + p C_n^{z-1} p^{z - 1} (1 - p)^{n - z + 1}$$

$$= p^z (1 - p)^{n - z + 1} \underbrace{(C_n^z + C_n^{z-1})}_{C^z_{n+1}}$$

$$P (Z = z) = p^z (1 - p)^{n + 1 - z} . C^z_{n + 1} \Rightarrow Z \sim B (n + 1 , p)$$

$\Rightarrow$ B(n , p) + Bernouilli (p) = B (n+1, p)
or Bernouilli (p) = B (1, p)
$\Rightarrow$ B (n , p) + B (1 , p) = B (n+1 , p)

Corollaires :

1. Par récurrence on obtient que $B(n, p) = \underset{n}{\ } B(1, p) = \underset{n}{\ } \text{Bernoulli}(p)$

Ce résultat est évident compte tenu de l'interprétation d'une binomiale et d'une Bernoulli

2. $B(n, p) + B(m, p) \sim B(n + m, p)$

Exemple 2 :

Par l'approximation Poissonienne
Si $n \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$

On doit s'attendre à ce que :
$P(\lambda) + P(\mu) \sim P(\lambda + \mu)$
car $B(n, p) \rightarrow P(\lambda)$
$B(m, p) \rightarrow P(\mu)$
$B(m + n, p) \rightarrow P(\lambda + \mu)$

Moitié de preuve :

$P(Z = z) = \quad P(X = x)\, P(Y = z - x)$
avec $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$
….
$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda + \mu)^{z}}{z\,!}$$

6.2 Cas continu :

(X , Y) couple de v.a continues indépendantes Z = X + Y

On recherche la densité de Z connaissant celles de X et de Y

$$f_Z(z) = \int f_X(x) \,.\, f_Y(z - x) \; dx$$

Produit de convolution

Exemple

v.a Gausienne
X et Y sont des v.a Gausienne (N (0,1)) indépendantes
…
On obtient $N(0, 1) + N(0, 1) \sim N(0, 2)$
ou plus généralement :

$$\boxed{\mathbf{N(\gamma 1, \sigma 1) + N(\gamma 2, \sigma 2) = N(\gamma 1 + \gamma 2, \sigma 1 + \sigma 2)}}$$

7. Espérance, Variance, Covariance :

7.1 Espérance mathématique :

Définition : L'EM d'une v.a, notée E[X]

$$E[X] = \sum_{x} x\,P(X = x) \qquad \text{pour le cas discret}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \quad (\text{où } f(x) \text{ représente la densité}) \quad \text{pour le cas continu}$$

L'espérance c'est la « moyenne »

Cas continus :

v.a de Bernoulli

$P(X = 1) = p$
$P(X = 0) = 1 - p$

$E[X] = 0\,(1-p) + 1.p = p$

L'espérance mathématique est égale à la probabilité de succès

v.a binomiale

$X \sim B(n, p) \Rightarrow P(X = x) = p^{x}\,(1 - p)^{n-x}\,C_{n}^{x}$

$E[X] = np$

L'espérance mathématique d'une v.a binomiale est égale à la probabilité d'un succès multipliée par le nombre d'essais.

v.a de Poisson

$X \sim P(\Leftrightarrow) \Rightarrow P(X = x) = (e^{-\Leftrightarrow} \Leftrightarrow^{x}) / x!$

$E[X] = \Leftrightarrow$

L'espérance mathématique d'une v.a de Poisson est égale à son paramètre $\Leftrightarrow$.

v.a géometrique

v.a où l'on recommence une expérimentation tant que l'on a pas de succès

$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}\,.\,p \quad x \geq 1$

$E[X] = 1/p$

Cas discrets :

v.a uniforme

$f(x) = 1/ (b - a)$ $a \leq x \leq b$

$E[X] = \int_a^b x \; 1/ (b - a) \, dx$

$E[X] = 1 / (b - a) \left[x^2/2 \right]_a^b$

$E[X] = 1 / (b - a) \; ((b^2 - a^2) / 2)$

$E[X] = (a + b) / 2$

L'espérance mathématique d'une v.a uniforme est le milieu de l'intervalle.

v.a exponentielle

$f(x) = \Leftrightarrow e^{-\Leftrightarrow x}$ avec $x \geq 0$

$E[X] = 1 / \Leftrightarrow$

v.a gausienne Standard N(0, 1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} * e^{-x^2/2}$$

$E[X] = 0$

Espérance d'une fonciton d'une v.a

Théorème

Soit une v.a quelconque E[X] est finie. Alors $E[aX + B] = aE[X] + b$
Si une v.a est transformée linéairement alors l'espérance mathématique est transformée de la même manière.

Théorème

Soit X une v.a quelconque alors E[g(x)] où g est une fonction quelconque

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x). \, f(x) \, dx$$

cas discret : $E[g(x)] = \sum_x g(x) \, P(X=x)$ cas discret

Cas particulier :

a = 1 , b = E[X]

E[X-E[X]]
E[X] –E[X] = 0

L'opération qui consiste à retrancher d'une v.a son espérance mathématique s'appelle le centrage. Il permet d'aboutir à une v.a dont l'espérance mathématique est nulle.

Exemple

N(⇐ , $®^2$)

On a N(⇐ , $®^2$) ~ ⇐ + ® N(0 , 1)
⇒ E[X] = E[⇐ + ® N(0 , 1)]
= ⇐ + ® E[N(0 , 1)]
= ⇐ car E[N(0 , 1)] = 0

7.3 La Variance

Définition Pour une v.a X don't $E[X^2] < \infty$ alors la variance est $Var(X) = E[(X – E[X])^2]$

La variance permet d'observer comment est répartie la densité (dans le cas continu) autour de E[X]

Définition Soit X une v.a qui a une variance finie, (Var(X)) = Ecart Type

Théorème Si X une v.a de variance finie alors $Var(aX+b) = a^2 Var(x)$
⇒ Ecart Type : (Var(aX+b)) = |a| (Var(x))

Théorème Pour une v.a X dont $E[X^2] < \infty$ alors $Var(x) = E[(X – E[X])^2]$ peut se calculer comme suit :

$$Var(X) = E[X^2] – E[X]^2 \geq 0$$

v.a de Bernoulli

$Var(X) = E[X^2] – E[X]^2$
Var(X) = p (1 – p)

v.a binomiale

Var(x) = n p (1 – p) : C'est n fois la variance d'une Bernoulli

v.a de Poisson

Var(X) = ⇔

v.a uniforme

$Var(X) = E[X^2] – E[X]^2$

$$E[X^2] \;=\; \overset{a}{\underset{b}{}}\; x^2 \,(1 / (b – a))\, dx$$

$= (a^2 + ab + b^2) / 3$

$Var(X) = ((b – a)^2) / 12$

Ecart Type : $(Var(X)) = (b – a)) / 2 \;\; 3$

L'espérance mathématique, c'est la position
L'écart Type c'est la longueur

v.a exponentielle

$E[X^2] = 2 / \Leftrightarrow^2$

$Var(X) = (2 / \Leftrightarrow^2) - (1 / \Leftrightarrow)^2$

v.a gausienne

VOIR POLY

8.2 Exemple

Jeu de P/ F

$X \sim$ Bernoulli (p) avec p = 1 / 2

$\mu = p$

$\sigma^2 = p\ (1 - p)$

$\overline{Xn}$ = fréquence statistique de « face » notée F

$P(\ |F - p| \geq \varepsilon\ ) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$

8.3 La somme centrée est réduite d'un grand nombre de v.a indépendante converge vers une gaussienne N(0, 1) C'est une convergence en loi

Deux applications au TCL :

Une binomiale, centrée normée converge vers une N(0, 1) lorsque $n \rightarrow \infty$

Loi de Poisson → Loi Gausienne Voir Cours

Statistique

Traitement des données

- Collecte des données ← Point fondamental
- Description des données ← Statistique descriptive
- Analyse des données ← Estimer des paramètres
  ← Tester des hypothèses
  ← Construire des modèles (Régression)